

船舶初期計画における振動予測のための
減衰機構、付加質量および構造振動の
解析的予測法に関する研究

2004 年 3 月

佐賀大学大学院工学系研究科
エネルギー物質科学専攻

加 藤 瞭

目 次

	頁
第 1 章 序 論	1
1.1 研究の目的	2
1.2 従来研究の概要	7
1.3 本研究の概要	11
第 2 章 構造減衰を考慮した振動方程式	13
2.1 序 言	16
2.1.1 概要	16
2.1.2 本章で用いられる記号とその説明	17
2.2 輸送機械における振動の特徴	19
2.3 振動応答の基本的特性および用語の定義	21
2.3.1 振動応答の基本的特性	21
2.3.2 定義	26
2.4 構造減衰を考慮したビームの曲げ振動	28
2.4.1 振動波動の特性	29
2.4.2 振動方程式	30
2.5 高次振動領域への振動方程式の拡張	32
2.6 実験および数値的検証	34
2.6.1 実験（その 1 片持梁）	35
2.6.2 実験（その 2 両端自由ビーム）	39
2.6.3 数値的検証	41
2.7 結 言	46
第 3 章 複合振動場における付加質量および流体減衰力	49
3.1 序 言	50
3.1.1 概要	50
3.1.2 本章で用いられる記号とその説明	52
3.2 ポテンシャル場における付加質量および流体減衰力	53
3.2.1 流体運動エネルギーと付加質量の関係	54
3.2.2 流体減衰エネルギー	57

	頁
3.2.3 複合振動場における運動エネルギーと付加質量	58
3.3 二次元流体場における運動エネルギーと付加質量	59
3.3.1 船体形状の Lewis 変換	60
3.3.2 船底に鉛直方向の速度が幅方向に放物線分布する場合の二次元付加質量	62
(1) 船体断面上における速度ポテンシャル ϕ	62
(2) 船体断面上における流れ関数 ψ	65
(3) 二次元流体運動エネルギー T および付加質量 m_ℓ	67
3.4 三次元流体場における運動エネルギーと付加質量	68
3.4.1 三次元空間における速度ポテンシャル場 ϕ	68
3.4.2 三次元空間船体断面上における流れ関数 ψ	72
3.4.3 三次元流体運動エネルギー T および付加質量 M_ℓ	72
3.4.4 振動モード展開係数 a_m	73
(1) 主船体振動の場合	73
(2) 二重底が sine モードで振動する場合	73
(3) 二重底が sine の 2 乗モードで振動する場合	75
3.5 複合振動場における流体運動エネルギーと付加質量	78
3.5.1 三次元付加質量修正係数 J_{ij}	79
3.5.2 主船体振動における流体運動エネルギー, 付加質量 および流体減衰エネルギー	81
3.5.3 二重底構造単独振動系	83
3.5.4 主船体と二重底の連成	84
(1) T_{12} の場合	84
(2) T_{21} の場合	86
3.6 実験および数値計算による検証	87
3.6.1 流体減衰エネルギー係数 λ の実験的推定	87
3.6.2 実船形状と Lewis 変換による形状との比較	96
3.6.3 船底速度分布の違いによる二次元付加質量の比較	99
3.6.4 複合振動時の付加質量計算	101
3.7 結言	107

	頁
第4章 荷重および剛性の分布が長さに沿って変化する主船体の振動数予測法	110
4.1 序言	111
4.1.1 概要	111
4.1.2 文章で用いられる記号とその説明	113
4.2 主船体形状の特徴と剛性および荷重分布	115
4.2.1 船体形状の数式表示	120
(1) 船の半幅 b の関数表示	120
(2) 没水面積 $S(\xi)$	121
4.2.2 剛性および荷重分布の数式表示	122
4.3 エネルギー法による船体振動計算	124
4.3.1 振動モード	125
4.3.2 船体固有振動数計算式	129
(1) 歪エネルギー	130
(2) 運動エネルギー	131
(3) 固有振動数の計算	132
4.4 固有振動数計算の簡易化	133
4.4.1 曲げ振動系におけるたわみ係数比 η_{nb} の決定	134
4.4.2 セン断振動系におけるたわみ係数比 η_{ns} の決定	136
4.4.3 固有振動数の計算	137
4.5 数値計算による精度検証	140
4.5.1 剛性，荷重および付加質量の関数分布	142
4.5.2 数値計算	148
4.6 結言	150
第5章 二重底構造の振動予測法	152
5.1 序章	153
5.1.1 概要	153
5.1.2 本章で用いられる記号とその説明	155
5.2 二重底構造のモデル化	156
5.3 エネルギー法を用いた最低次固有振動数の計算	159

	頁
5.3.1 エネルギー法による静解析	160
(1) エネルギー式の展開	160
(2) たわみ関数式	164
(3) マトリクス要素と静変位ベクトル $\{\tilde{\delta}_i\}$ の計算	165
(4) 質量マトリクスの計算	167
5.4 数値的検証	168
5.4.1 静的解析	168
5.4.2 振動固有値解析	171
5.5 結言	172
第 6 章 結論	174
謝 辞	180
参考文献	182

	頁
第 2 章 付 録	
付 録 2.1 $m\ddot{x}+kx=f_0\sin\omega t$ に対する解の分解	186
付 録 2.2 $m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=f_0e^{i\omega t}$ における解の分解	189
付 録 2.3 動粘性減衰と構造減衰	192
付 録 2.4 振動方程式における動粘性影響項の導出根拠	195
付 録 2.5 ビームの曲げ振動における応答特性	198
付 録 2.6 曲げ，剪断変形，回転慣性および構造減衰を考慮した振動方程式の導出	204
付 録 2.7 高次振動における円固有振動数 ω_n と減衰係数 ε_n	208
第 3 章 付 録	
付 録 3.1 断面が剛体運動する有限長さビームの曲げ振動における三次元付加質量	211
A3.1.1 船体断面の Lewis 変換による近似	211
A3.1.2 Lewis 断面の二次元付加質量	215
(1) 自由表面条件	215
(2) 二次元流場における速度ポテンシャル ϕ および流れ関数 ψ	216
(3) 二次元付加質量係数	218
A3.1.3 有限長さ Lewis 断面の曲げ振動時三次元付加質量	220
(1) Bessel 関数展開	220
(2) 速度ポテンシャル $\phi(r, \theta, z, t)$	222
(3) 流れ関数 $\psi(r, \theta, z, t)$	224
(4) 有限長効果を考慮した運動エネルギー T と三次元修正係数 J	225
A3.1.4 船の単位長さあたりに分布する付加質量	227
付 録 3.2 a_1, a_3, ξ に対する制限条件	228
A3.2.1 a_1, a_3 に対する制限条件	229
A3.2.2 ξ における符号の条件	233
付 録 3.3 速度ポテンシャル係数 α_s の導出根拠	236

	頁
付録 3.4 流れ関数係数 β_s の導出根拠	238
付録 3.5 振動モード $Z(z)$ のフーリエ展開	240
A3.5.1 主船体振動モードの場合	240
A3.5.2 二重底構造が sine モードで振動する場合	241
A3.5.3 二重底構想が sine の 2 乗モードで振動する場合	244
第 4 章 付録	
付録 4.1 剛性・荷重分布を与える係数項の決定	247
付録 4.2 ビームの曲げおよびせん断のたわみの基本関数 およびたわみの同相性に関する検証	248
A4.2.1 Timoshenko ビームの振動方程式	249
第 5 章 付録	
付録 5.1 Rayleigh の方法による最低次固有振動数計算法	254
付録 5.2 二重底構造に対するエネルギー式の導入	256
付録 5.3 エネルギー式のつり合い方程式との同一性	264

第 1 章

序 論

1.1 研究の目的

受注産業である造船業は、船主の個別案件毎に対応せざるを得ないモノプロダクションが基本である。同一船型のシリーズ建造はあっても、原則的には一船一設計の形態をとる。

したがって、船主のニーズにきめ細かく対応しながら、しかも迅速に最適プランを提供することは、船舶設計部門に課せられた重要な役割である。

造船は総合産業である。種々の専門メーカーからの機器をシステム的に配備し、基盤となる船体構造をつくり上げることにより全体装置産業としての造船業が成立する。

優れた船型と船体構造を創出することが造船所の最大の課題であるが、船体構造に関していえば、現在時点で解明が進んでいない分野に振動問題がある。単品生産が原則の船舶では、プロトタイプをつくって徹底的に振動対策を考える、あるいは改良するということが不可能である。初期計画段階での確に振動を予測する重要性がここにある。

しかしながら詳細かつ大規模な数値解析を実施しても、予測した振動と現実の振動に乖離が生じることが多い。

振動予測を簡潔に表現すれば、質量系－剛性系－減衰系－外力系の的確かつバランスのとれた予測ということになる。これらの推定のため、数多くの研究がなされて、なお、振動予測が困難である理由を筆者は以下のように把握する。

イ 質量系

数万トンの質量を有する船舶は水面上での振動による流体への運動伝達により、それに数倍する流体付加質量を生じさせるが、航行中の船舶での振動数領域では、一種のビームとしての横振動と船底、船側構造の面外振動の連成が生じる。しかし、このような複合振動時の付加質量の数理論的な予測法が確立されていないこと。

ロ 剛性系

均一でない変断面構造の船舶の振動を正確に予測するには、有限要素法による全体解析が必要となる。この実行のためには莫大なデータ処理が必要で、日常的に利用することは現実的でない。しかし、それに代わる数理的に簡潔な予測法が確立されていないこと。

ハ 減衰系

数万トンにおよぶ船舶の空中振動実験は不可能である。このため、浮上時の振動データから減衰を予測するにしても、構造の減衰と流体減衰を混在した形で推定するか、流体減衰を無視できるとして減衰は全て構造系で生ずると仮定するのが現状である。このため、現在尚、振動応答に深い関係を有する減衰に明確さを欠くこと。

ニ 外力系

船舶における外力系はエンジン起振力およびプロペラ起振力である。プロペラ起振力では翼端から発生するキャビテーションによる周期的衝撃力推定に不明確な点があること。

筆者は、これまで、初期計画段階における振動予測法の構築にたずさわって、これに関連する研究を行ってきた[1],[2],[3],[4]。

本研究は、これまでに行ってきた研究を総合化し、上記イ～ニ項のうちニ項を除くイ、ロ、ハについて考察したものである。ニ項については起振力の明確な起振機実験が振動予測の一般的手法となっていることによる。

現今の船舶計画および設計には有限要素法、境界要素法を用いた大型数値解析が大幅に取り入れられている。しかし、これら解析ソフトウェアは大規模であるが故に、市販のものに頼らざるを得ず、ブラックボックス化されている。しかも膨大なデータの作成を要する。アウトプットされた結果は一見もっともらしくとも、結果の妥当性に対する評価は困難であり、いわゆる **black box design, computer said design** に陥る危険性をはらむ。

このため、一貫した数理的振動予測をシステム化したいわけで

あるが、その実現のためには、物理的観点から未解明な部分を解消し、論理性のある数理モデルを構築し、以後の研究の進歩に対応できる簡明なシステムとしたい。

このため、本研究の方向は、以下を指針として進めることとした。

- ① 有限要素法、境界要素法等による大規模数値解析は、結果の評価が困難であり、結果の理論的筋道をたどりにくい。
もっとも本質的なパラメータとなりうるものを推察し、数理論的モデル化を目指すこと。
- ② 理論的に解くことができないがために、既販の数値解析ソフトを用いて結果を得ようとするわけであるが、このような問題については、解析的なアプローチが可能なレベルまで近似的なモデルに落とし、数理的展開をはかること。
- ③ 経験、実績から、よく現象を説明するといわれる理論についても、論理的合理性に欠けると考えられるものについては、新しい論理の展開をはかること。
- ④ 将来的にはシステムとしての船体振動予測法として組み上げていきたい。このため、今後の研究成果の取り入れが可能なように、論理的な面で限界、制約条件等を明確にしておくこと。

本研究を行うに当たっては、とくに、以下について力点を置いた。

(1) 減衰機構の解明

振動研究とは、前述したように、質量－剛性－減衰－外力の論理的合理性を有し、かつバランスのとれた解明にある。

現在時点用いられている振動方程式は、振動教科書の標準ともいえるべき、質点－バネ－ダッシュポット（速度に比例する抵抗）に類似したものであり、鋼構造物である船舶では歪依存の減衰系（構造減衰）となるべきにもかかわらず[5]、通例

的に減衰を一種のダッシュポットとしての取り扱いで推移してきた[6][7][8]。鋼構造が本来有している減衰特性を採用すれば、実験あるいは実船の計測結果を説明できないため、便宜的にダッシュポットにモデル化したものと考えられる。本研究では鋼構造の本来的特性である構造減衰に焦点をあて、実測結果を説明しうる振動方程式を導出する。

(2) 付加質量の数理的予測

浮上した船舶の振動により、船舶環境としての流体には変動速度場が生じ、運動エネルギーを生成する。いわゆる付加質量効果であるが、船体のたわみ振動と船底、船側構造の面外振動が複合された場での付加質量の予測は、境界要素法を用いた数値計算でしか、予測は困難である。

この問題に対して対象モデルの近似化をはかることにより数理的な予測を可能とする。

(3) 流体減衰現象の定量化

付加質量と密接な関係を有することを、理論面から明らかにし、その定量化への道筋をつける。

(4) 船体固有振動数の予測法

変断面、不均一質量分布の船体横たわみ振動の正確な予測に有限要素法を用いた数値計算が多用されるが、剛性、質量の船の長さ方向の変化を考慮に入れた固有振動数予測法を構築することにより、パラメーター数を限定し、振動に対する見通しを容易にする。

(5) 船体二重底構造の振動予測

直交異方性で、かつ剪断変形の影響を大きく受ける二重底構造の振動予測は、有限要素法解析によるしか方法がなかったが、エネルギー法を用い、直交異方性および剪断の影響を考慮した計算法を導くことにより、限られた数の入力データで

解析を可能にする。

1.2 従来研究の概要

(1) 減衰機構の解明

減衰機構については、とにかく解析に乗りやすいことが優先されたことと、機械系における減衰装置として現実に活用される流体減衰装置の機構が二階の線形微分方程式として表現されるため、一般的にダッシュポット（粘性減衰体とも称す）にモデル化され[6], [7], [8], この考え方にしたがって複雑な構造体である船舶すらも同様な取り扱いをしてきた。

ただし、熊井は、主船体振動の特徴である剪断変形および回転慣性の影響を考慮した減衰の表現法について粘性減衰の仮定を踏まえて研究を行った[9], [10]。一方、山本は構造体振動減衰を対数減衰率表示したとき、その振動数依存性について実験を行った[11]。対数減衰率が粘性減衰と同様に振動数により変化するともいえるし、変化しないともいえる明解さを欠く結論となっているが、この論文の注目すべき点は、流体減衰が無視できるようなオーダーではないことを示唆した最初の論文であることだろう。

鋼構造の減衰については B.J.Lazan によりとりまとめが行われ、鋼材の減衰は振動速度に依存せず振動の一周期間中に消散するエネルギーは振動振幅にのみ依存することが明確に示されている[5]。

一般的な振動方程式は B.J.Lazan の指摘にもかかわらず解析の簡便さから振動数依存説をとる理由の一つは、実船計測値[12]が、バラツキは非常に大きいものの振動数依存性を示しているように見えるところにもあるようである。

このように減衰については明らかになっていない点が非常に多く、また、振動現象にはいまだ不明な点が多く存在するのだが、その不明な点を全て減衰に帰させてしまっているのもバラツキを大きくしている原因であると推察する。

最近、武田等は、船体構造としての減衰と船舶環境としての流体が有する減衰の分離を試み始めた[13], [14], [15]。まだ端緒についたばかりではあるが注目に値する。

(2) 付加質量と流体減衰力の推定

付加質量は船の排水量の数倍にも達する膨大なものであるが、量的に測定することはできず、数理的な計算による推定によるしか方法がない。

この付加質量推定の先鞭をつけたのは Lewis [16] である。この結果を踏まえて断面内では剛体移動する船体形状の三次元付加質量の計算法を導いたのは熊井であった [17], [18]。熊井の方法により船の二重底と主船体の振動が連成しない、いわゆる断面剛体変位状態の付加質量を明らかにすることは可能になった。

船の振動が問題となるのは 10Hz 前後の居住区画の振動であり、この周波数領域は、船のサイズによっても異なるけれども、一般に主船体の高次振動との連成が生じる。そして主船体の高次振動領域では、船体貨物倉部分にある二重底の連成が生じるが、熊井の方法によりこの連成振動時の付加質量を計算できないため、境界要素法を用いた大規模数値解析に頼るしか現在のところ方法がない [19], [20]。

一方、流体減衰についてはこれまで、無視しうる微小量であるとして構造減衰の中に含めて考えるが一般的であった。しかし、近時、武田等 [13], [14], [15] によりその分離が試みられるようになった。いわゆる Rayleigh 減衰と称せられるものであり付加質量にある係数を掛けたもので与えられるものである。

この流体減衰推定の別のアプローチとして筆者は Rayleigh の速度に比例する抵抗の概念を用いてタンク内に自由表面を有する流体のスロッシング現象を解析的に明らかにする方法を導いた [21]。いずれにしても付加質量と流体減衰力の間には密接な関係がありそうであるが、いまだ、論理的に明確な解答は得られていない。

(3) 主船体振動の予測

主船体振動の予測に関しては長い歴史を有しており、簡易推定式から遷移行列法を用いたコンピュータによる解析まで多くの研究がなされてきた。

このうち簡易計算式を用いて手計算でも計算できる方法であるが Todd [22] の研究は船体主寸法（船の寸法や排水量）さえ分かれば算術式で振動数を推定可能である。しかし低次振動領域に限定されるし、推定精度も粗い。

一方、熊井は主船体振動を高次領域にわたって推定するため、船の変断面影響を考慮し、エネルギー式を用いた計算式を導いた[9]、[23]。ただし、実船計測結果に合わせるように修正係数による補正を行うなど、信頼性に欠けるものであり、振動に関して定性的判断を下すための参考式に留まらざるを得ない。

船を長さ方向に分割し、要素毎に剛性、荷重を入力することにより遷移行列法を用いた解析法もまたコンピュータ利用拡大を背景に行われるようになった[24]。

しかし、付加質量の推定があいまいな計算法であり、計算データの準備の膨大さに比較して結果の信頼性に不安をいだかせるものである。

現在においては NASTRAN による大型数値解析がパーソナルコンピュータで容易に行えるようになったためもあり、主船体振動解析には数値解析が常識的な手段となったようである。流体環境までを有限要素化したり、そこまでいかににしても付加質量計算に境界要素法を用いた解析を行うなど、膨大なデータ作成に勢力を注いでいるが、このようなことを実際に行うにしても設計の詳細が固まった後工程での解析しか行えないため振動対策を設計の早い段階で決定するのには無力である[19]、[20]。

(4) 二重底構造の振動予測

主船体高次振動においては二重底構造との連成影響が顕著に表れる[19]、[20]。このため船全体を要素分割し、さらに付加質量推定のために有限要素法あるいは境界要素法を用いるなど多大な労力を消費した力まかせの解析が主体となっている。企業の研究所だからできることであって、設計者の立場から考えると時間的にも人的にもこのような力まかせ解析は非現実的である。

このような大規模解析を行うのも二重底構造の面外振動挙動を解

析的に求める手段が欠落していることが理由の一つに上げられるだろう。

筆者は，このような有限要素法でしか解が得られないといわれていたサンドイッチ構造（あるいはハニカム）である二重底構造の静的強度をエネルギー法と周辺構造との連結条件を **Lagrange** の未定乗数法を用いて簡易に解析する方法を導いた[25],[26],[27]。現在は有限要素法による解析しか方法がないものの，筆者の方法を振動問題に拡張すれば簡単に解析が行われるであろう。

1.3 本研究の概要

本研究は船舶計画の初期段階，すなわち具体的な設計以前の新規開発段階や流動的要素を多分に含む設計初期計画段階における船舶振動挙動を迅速かつ極力的確に予測するにあたって，現段階においてもなお，未解明な以下の項目について，研究を行うものである。有限要素法や境界要素法を用いた膨大なデータ作成を要する計算法でない，対象のモデル化を極力簡潔明瞭なものにして，パーソナルコンピュータによる数値解析を行うにしても，簡単に物理的な定量化の容易な計算法を駆使し，瞬時に結果を得ることのできる方法樹立のための計算要素作りを企図したものである。すなわち研究は次の項目に限定した。

- 振動における減衰機構の解明
- 船体高次振動までを含む包括的付加質量予測法の確立
- 主船体高次振動までを含む振動の高精度予測法
- 主船体高次振動において問題となる二重底構造面外振動の有限要素法によらない迅速解析法

第 2 章 構造減衰を考慮した振動方程式では，素材（鋼材）ベースにおいて振動 1 サイクルあたりの減衰エネルギーは歪の振幅にのみ依存し，振動数（振動速度）には依存しないにもかかわらず鋼材の合成体である構造では振動数依存となるといわれ，現実にその考えにしたがった振動解析が行われているのだが，構造減衰が歪依存であっても，振動の波動速度の考えを導入すれば振動節数に比例して減衰が変化することを明らかにする。

2.2 輸送機械における振動の特徴では，乗用車，航空機および船舶における振動対策の違いについて触れ，船舶のように鋼材と環境としての流体が減衰を規定する輸送体は本来的に振動が生じやすいものであり，振動予測の重要性について記述する。

2.3 振動応答の基本的特性および用語の定義では，質点－バネ－ダッシュポットという振動の教科書で通例的に用いられるモデルに対して検討を行い，共振とはどのようなメカニズム，プロセスで生じるものなのかについて明らかにする。

さらに減衰に関して一般に用いられる用語のうち対数減衰率，動

倍率，動粘性減衰，構造減衰について説明する。

2.4 構造減衰を考慮したビームの曲げ振動では，通例的にビームの曲げ振動に用いられる方程式が無限にビーム中に分布したダッシュポットを表現したものであることを明らかにし構造減衰については，曲げ振動における波動速度に意味があることを示し， n 節振動では n 波形目毎の振動変位の和が共振時応答となることを明らかにする。この考え方をとれば歪依存の構造減衰であってもダッシュポットでの速度依存的な性質を併せ示し得ることを示す。

2.5 高次振動領域への振動方程式の拡張では，剪断変形および回転慣性の影響を考慮しかつ構造減衰体とした場合の振動方程式を導き，この場合の対数減衰率を与える式を導く。

2.6 実験および数値的検証では，同一振動モード（すなわち同一節数）における対数減衰率は振動数に無関係に一定，すなわち構造減衰の特性を示すことを実験的に確認する。また，節数に比例して変化することも確認する。

主船体振動においてはこれまで減衰の時間依存という素材の特性とは本来異なる減衰挙動を仮定するのが一般的であるが，本研究における構造減衰の振動節数依存性を採用すれば，類似の結果を与えることを明らかにし，船のサイズにかかわらず一本の線で対数減衰率が表現できる合理性を数値的に検証する。

2.7 結言では，結果のとりまとめを行う。

第 3 章 複合振動場における付加質量および流体減衰力では，船体高次振動領域で生じる主船体振動（各断面は剛体的に運動する）と二重底構造の面外振動が連成する場合の付加質量および流体減衰力の計算法について言及する。

付加質量を実験的に定量化することは困難であり，計算により推定しなければならない。一方，流体減衰力については Rayleigh の速度に比例する抵抗 λ の概念を適用すれば付加質量と密接な関係が生じる。実験によりこの λ の定量化を試みる。

3.2 ポテンシャル場における付加質量および流体減衰力では，Green の定理を用いて速度ポテンシャル場における付加質量計算の基本式を導入し，Rayleigh の速度に比例する抵抗の概念をこのポテンシャル場に適用することにより時間あたりの発散エネルギーが λ および付加質量と関係づけられることを示す。また，複合振動場における付加質量の関係式について言及する。

3.3 二次元流体場における運動エネルギーと付加質量では，Lewis 変換により円を船体形状にほぼ近い形に写像し，接水振動時の速度ポテンシャルを求め，このポテンシャル関数より二次元付加質量が簡潔な式で表現できることを示す。

3.4 三次元流体場における運動エネルギーと付加質量では，二次元の場合と異なり三次元では船の長さ方向への流体拡散の考慮の仕方について言及し，無次元値である三次元修正係数の形で表す方法について示す。

3.5 複合運動場における流体運動エネルギーと付加質量では，主船体振動単独，二重底振動単独，およびそれらが連成した場合の二次元付加質量と三次元修正係数の計算法について述べる。

3.6 実験および数値計算による検証では，片持梁の長さを変化させ同一振動モードでの減衰エネルギー係数 λ の実測を行い円固有振動との関係を調査し，さらに両端自由ビームにおいての傾向を実測する。

また，二次元付加質量と三次元修正係数の値を複合振動場において計算し，その特性について調査する。

3.7 結言では，第 3 章のとりまとめを行う。

第 4 章 荷重および剛性の分布が長さに沿って変化する主船体の振動数予法では、主船体振動予測を、有限要素法を用いた、したがって、膨大なデータ準備を必要とする解析に比べてデータ数が船の主要寸法程度ではほぼ同程度の推定精度を有する、しかもパーソナルコンピュータで瞬時の解析を可能とする方法論を構築する。

4.2 主船体形状の特徴と剛性および荷重分布では、船の各断面が複雑に変化し、数学式で表すことのできない船型を非常に簡単な関数式で近似する方法について述べ、かつ船体重量や剛性の船の長さ方向への変化の関数近似法について触れる。

4.3 エネルギー法による船体振動計算では、4 個の未定たわみ係数を有する関数式を仮定しエネルギー法を用いて固有振動数を計算する方法を示す。

4.4 固有振動数計算の簡易化では、4.3 の近似をさらに進め未知係数を 1 個とした場合の計算法を示す。

4.5 数値計算による精度検証では、有限要素法による解析結果と提案する近似計算法の比較を行いその推定精度を検証する。

4.6 結言では、第 4 章のまとめを考察する。

第 5 章 二重底構造の振動予測法では、船体振動予測のネックとなる二重底構造の振動予測を有限要素法に頼らない方法の構築について述べる。

5.2 二重底構造のモデル化では、一種のサンドイッチ構造であるため、剪断変形の影響を大きく受ける二重底構造を有限要素法を用いないで簡易に計算するためのモデル化について述べる。

5.3 エネルギー法を用いた最低次固有振動数の計算では、いわゆる Rayleigh 商の考え方に立脚した最低次固有振動計算に必要な剛性マトリクス、質量マトリクスの計算法および静的既知変位行列の計算法について言及する。

5.4 数値的検証では、最低次固有振動数解析に必要な静たわみ行列の有限要素法による結果との比較を示し、さらに、やはり有限要素法解析と提案する解析法による結果と比較結果を示す。

5.5 結言では、第 5 章全体のとりまとめを行う。

第 2 章

構造減衰を考慮した振動方程式

2.1 序言

2.1.1 概要

振動応答は起振力と剛性そして減衰力によって規定される。起振力についてはその予測法が整備され良好な精度で推定が可能であるとともに、起振力が明確な起振器実験により振動の応答特性を知ることができる。このため本研究では起振力については触れないことにする。

剛性については、労力さえいとわなければ正確な剛性分布を知ることが可能である。

しかし減衰力については、そのメカニズム解明の端緒についた段階であり、構造が有する減衰と環境としての海洋に振動波動が伝わることによる流体減衰の分離が試みられている。

本章は船体構造が有する減衰の定量化を試みるものであり、この目的のため、これまで用いられてきた振動方程式の問題点を指摘し、これに代わる方程式を導出、基礎的実験による検証および数値的シミュレーションにより、その妥当性を確認するものである。

2.2 では船体振動の特徴を車輦系および航空機との比較により明確にし、船舶における防振設計に対する自由度が少ないことを指摘する。

2.3 では本章のテーマである船体振動方程式の導出の前提となる振動応答の基本的特性について記述し、共振現象は瞬時に生じるものではなく過去の変位の累積が共振を与えることを示す。また、振動応答の支配的要素である減衰について一般的に用いられている動粘性減衰と船体のような鋼構造物で生じる構造減衰について用語を定義する。

2.4 では船体のような一種のビームとしてモデル化されるものの曲げ振動は曲げを一種の波動としてとらえることの必要性を指摘する。

共振とは過去の波動の累積であること、ビームの曲げ振動では節数によって波動速度が異なり、過去の波動の累積は波動速度に

応じ離散的和でなければならないことを示し、これまで慣例的に用いられてきた振動方程式に代わる離散的累積を考慮した振動方程式を導く。

2.5 では高次振動領域、すなわち節数が増加したとき、曲げに加えて剪断変形および船体断面の回転慣性の影響を考慮しなければならないが、これらを考慮した高次振動領域をカバーする振動方程式を導く。

2.6 では鋼構造での減衰特性に関する実験結果を紹介し、これまで慣例的に用いられてきた動粘性減衰では現象を説明できないことを示す。そして鋼材が本来有する構造減衰の方が実験結果とよい対応をすることを検証する。また、提案する構造減衰を考慮した場合と、これまでの動粘性効果を考慮した場合について船のサイズをほぼ網羅する3種類の船舶について比較を行い、今回提案する方法を用いれば船のサイズに関係なく対数減衰率(δ)が統一的に表現できることを示す。

2.7 では、まとめと全体的考察を行う。

2.1.2 本章で用いられる記号とその説明

m	: 集中質量 [kg] と分布質量 [kg/m] として使用
\bar{m}	: 分布系における単位長さあたりの質量 [kg/m]
c	: 粘性減衰係数 [$\text{N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}$]
k	: バネ定数 [$\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$]
EI	: ビームの曲げ剛性 [$\text{N} \cdot \text{m}^2$]
$k'GA$: 剪断剛性 [N]
f_0	: 起振外力 (最大値) [N]
$f(t)$: 変動起振外力 [N]
$f(x,t)$: 分布系における外力 [N/m]
x	: 質量系における変位 [m] と分布質量系における長さ [m]
$y(x,t)$: ビームの横変位 [m]
$\psi(x,t)$: 曲げによる回転角 [無次元]

r	: 断面の回転半径 [m]
ω	: 円振動数 [s^{-1}]
ω_n	: 円固有振動数 [s^{-1}]
p	: 円固有振動数 [s^{-1}]
ξ	: 無次元減衰率
α	: 動粘性減衰定数 [N]
γ	: 構造減衰定数 [無次元]
γ_b	: 曲げ変形に対する構造減衰定数 [無次元]
γ_s	: 剪断変形に対する構造減衰定数 [無次元]
δ_{si}	: 静変位 [m]
t	: 時間 [s]
δ	: 対数減衰率 [無次元]
π/δ	: 動倍率 [無次元]
T_n	: 固有周期 [s]
ν	: ポアソン比 [無次元]
ε	: 構造要素に生じる歪 [無次元]
A	: 材料定数 [$\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$]
α	: 曲げ剛性と剪断剛性との関係を表す係数 [無次元]
β	: ビーム断面の回転半径とビーム長さの比の 2 乗 [無次元]

2.2 輸送機械における振動の特徴

自動車、列車等車輻系の振動においては、構造体として有する剛性と減衰のみでは使用に耐えない乗り心地となる。このため、別途スプリングや減衰体を設けて振動を許容内に納める。車体は剛体すなわち質量系として取り扱われる。船舶は海洋というソフトな環境を航行するため、構造が有する剛性と減衰に流体減衰との組み合わせで振動が規定される。

航空機は車輻系と船舶の中間、すなわち飛行中の振動は船舶と類似、地上走行中は車輻系に組み込まれたスプリングー減衰により振動を制御している。

車輻系をモデル化すると Fig.2.2.1 に示すように質量ーバネー減衰系として表現できる。バネー減衰は使用目的に応じて独立な設計が可能である。

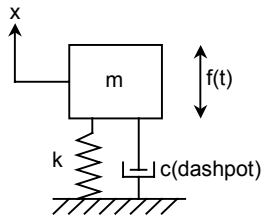


Fig.2.2.1 Vibration model for vehicle

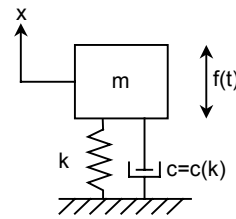


Fig.2.2.2 Vibration model for ship

一方、船舶においては、船体構造自体が振動系を構成し、剛性が決まると付随して減衰も規定されるため、振動設計における自由度は大きな制約を受けることになる。船舶における振動モデルを Fig.2.2.2 に示す。減衰 c はバネ k の関数として与えられる。

Fig.2.2.1 に示すモデルに対する振動方程式は、

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \quad (2.2.1)$$

と表され、Fig.2.2.2 に示すモデルでは次式で与えるのが一般的である。

$$m\ddot{x} + k\left(1 + \xi \frac{d}{dt}\right)x = f(t) \quad (2.2.2)$$

ここで記号の意味と次元は以下のとおりである。

m : 系の質量 [kg]

k : バネ定数 [$\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$]

c : 減衰係数 (ダッシュポット) [$\text{N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}$]

ξ : 減衰率 [s]

x : 系の変位 [m]

$f(t)$: 外力 [N]

(2.2.2)式で与える場合、減衰項は振動速度依存性を示す。いわゆる動粘性効果と称されるものである。

船舶においては剛性（バネ）と減衰は不可分の関係にあると記述した。使用する鋼材が船舶の剛性と減衰を規定*するが、鋼材減衰の基本的特性は歪依存性であり、振動速度には依存しない構造減衰としての特性を有する。構造減衰の場合、振動方程式は次式で与えられる。

$$m\ddot{x} + k(1 + i\gamma)x = f(t) \quad (2.2.3)$$

ここで γ : 無次元減衰率

現在に至るも船舶振動において、(2.2.2)式が採用され、(2.2.3)式を用いない理由は、

- (a) 動粘性的效果を考慮した方が実測値との対応がよい
- (b) 流体減衰、その他の減衰影響項をひとまとにする便法

にあるようである。

しかし、最近、流体減衰に注目が集まり、無視できない影響を有する可能性を指摘する研究 [13]、[14]、[15] が注目されるようになってきた。

これまで減衰は、そのメカニズムが複雑であるがために、実験定数的に取り扱われてきたが、有限要素法を用いた大規模数値計算により複雑な構造でも数値を得ることが可能になった以上、減衰を未知のまま放置することができなくなったことも、減衰機構解明への動きを加速させている理由である。

* 環境としての流体減衰も影響する。

2.3 振動応答の基本的特性および用語の定義

本節では、振動応答の基本的特性について整理し、以降の論述で用いる用語の定義を行う。

本節で共通している記号の定義は以下のとおりである。

記号

m : 質量 [kg]

\bar{m} : 分布系における単位長さ当たりの質量 [kg/m]

c : 粘性減衰係数 [$\text{N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}$]

k : バネ定数 [$\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$]

EI : ビーム曲げ剛性 [$\text{N} \cdot \text{m}^2$]

f_0 : 起振外力（最大値）[N]

$f(t)$: 起振外力[N]

$F(x,t)$: 分布系における外力 [N/m]

x : 変位 [m]

y : ビームの横変位 [m]

ω : 円振動数 [s^{-1}]

p : 円固有振動数 [s^{-1}]

ξ : 無次元減衰率

α : 動粘性減衰定数 [s]

γ : 構造減衰定数 [無次元]

δ_{st} : 静変位 ($=f_0/k$) [m]

t : 時間 [s]

δ : 対数減衰率 [無次元]

π/δ : 動倍率 [無次元]

2.3.1 振動応答の基本的特性

複雑な構造体でもその基本となるものは質量－バネ－減衰である。減衰については、まだ未解明な点が多く残っているが、本節においては減衰を速度に比例する抵抗を生じるモデルとしてのダッシュポットを採用する。以下において、計算式展開の詳細は付

録 2.1 および付録 2.2 に示す。

(1) 無減衰振動の場合

今外力 $f(t)$ を次のように与える。

$$f(t) = f_0 \sin \omega t \quad (2.3.1)$$

無減衰振動の場合の振動方程式は

$$\ddot{x} + p^2 x = \frac{f_0}{m} \sin \omega t \quad (2.3.2)$$

ここで

$$p^2 = \frac{k}{m} \quad (2.3.3)$$

(2.3.2)式の解は次のように与えられる（付録 2.1 参照）。

$$x = \frac{\delta_{st}}{1 - \left(\frac{\omega}{p}\right)^2} \cdot \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{p} \sin pt \right) \quad (2.3.4)$$

共振時すなわち $\omega = p$ のときには

$$x = -\frac{\delta_{st}}{2} \omega t \cdot \cos \omega t \quad (2.3.5)$$

すなわち時間の経過とともに変位は無限大となることを示している。これはまた、共振は瞬時に生じるものではないことを意味する。Fig.2.3.1 に時間の経過とともに振動変位が拡大している様子を示す。

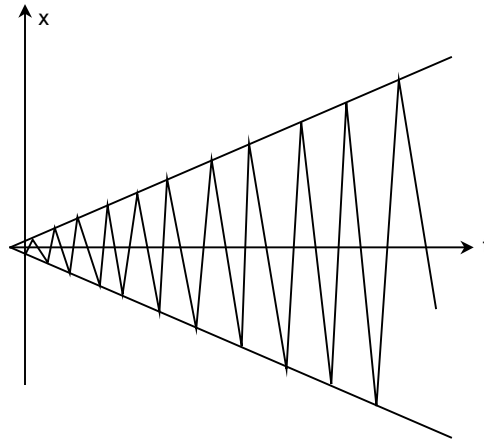


Fig.2.3.1 Time history of vibration magnification

Fig.2.3.1 に示す振動変位の増大の見方を変えてみる。時点時点での最大変位は

$$t = \frac{2\pi}{\omega} \cdot n \quad (2.3.6)$$

に生じるので(2.3.6)式を(2.3.5)式に代入して最大変位の変化を調査する。

$$x = -\pi\delta_{st} \cdot n = -\pi\delta_{st} \sum_{n=1}^n 1 \quad (2.3.7)$$

すなわち共振とは

- (a) $n \rightarrow \infty$ で発生
- (b) 1 周期毎の $\pi\delta_{st}$ の加算

という特徴を有する。Fig.2.3.2 に素成波の時間挙動の状態を示す。

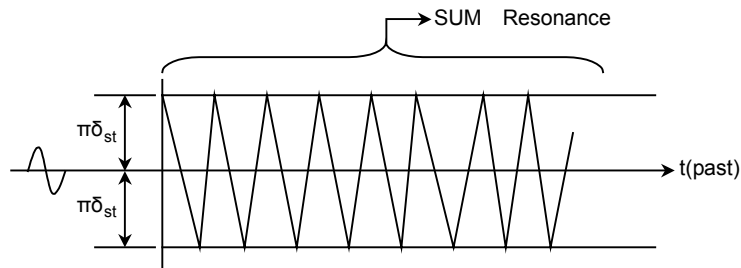


Fig.2.3.2 Time history of vibration component in resonance

(2) 減衰振動の場合

振動方程式を一般的に表すと次式で与えられる（付録 2.2 参照）。

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f_0 e^{i\omega t} \quad (2.3.8)$$

両辺を m で割り整理する。

$$\ddot{x} + \xi p \dot{x} + p^2 x = \frac{f_0}{m} e^{i\omega t} \quad (2.3.9)$$

こ こ で

$$\left. \begin{aligned} p &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \xi &= \frac{c}{\sqrt{mk}} = \frac{2c}{c_{cr}} \end{aligned} \right\} \quad (2.3.10)$$

$$c_{cr} : \text{臨界減衰係数} \quad (= 2\sqrt{mk})$$

(2.3.9)式の解は

$$x = \delta_{st} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\omega}{p}\right)^2 - i \left(\xi \frac{\omega}{p}\right)}{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{p}\right)^2\right\}^2 + \left(\xi \frac{\omega}{p}\right)^2} e^{i\omega t} \left(1 - e^{-\frac{\xi}{2} p t}\right) \quad (2.3.11)$$

$p = \omega$ のとき共振状態となり、そのときの変位は、

$$x_{res} = -i \delta_{st} \cdot \frac{1}{\xi} e^{i\omega t} \left(1 - e^{-\frac{\xi}{2} \omega t}\right) \quad (2.3.12)$$

共振時の変位の最大値は

$$x_{res} = \frac{\delta_{st}}{\xi} \quad (2.3.13)$$

で与えられ、 $1/\xi$ を動倍率と称する。

一方、(2.3.8)式の右辺の外力項が 0 のとき、すなわち自然減衰振動について考える。

この場合の解は次のように与えられる。

$$x = A e^{\left(-\frac{\xi}{2} + i\right) p t} \quad (2.3.14)$$

(2.3.14)式を図示すると Fig.2.3.3 に示すように時間とともに振動変位は減衰する。このとき隣接する変位の比の自然対数を δ と定義すると

$$\delta = \ln \frac{e^{\frac{\xi}{2}pt}}{e^{\frac{\xi p}{2}\left(t + \frac{2\pi}{p}\right)}} = \pi\xi \quad (2.3.15)$$

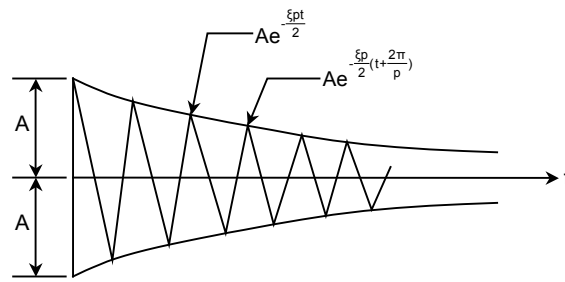


Fig.2.3.3 Natural damping

この δ を対数減衰率と呼び無次元量である。また (2.3.15) 式との関係より動倍率 $1/\xi$ は以下の関係を有し、一般に π/δ を動倍率とする。

$$\text{動倍率} = \frac{1}{\xi} = \frac{\pi}{\delta} \quad (2.3.16)$$

一方、(2.3.12) 式で与える変位の時間経過を Fig.2.3.4 に示す。 δ_{st}/ξ に漸近していく関係を与える。各振動変位の最大値を考えるため

$$t = \frac{2\pi}{\omega} m \quad (2.3.17)$$

を (2.3.12) の関数に代入すると次式を満足する。

$$\begin{aligned} x_{res} &= -i \frac{\delta_{st}}{\xi} (1 - e^{-\pi\xi m}) \\ &= -i\pi\delta_{st} \sum_{m=0}^{m-1} (e^{-\pi\xi})^m \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

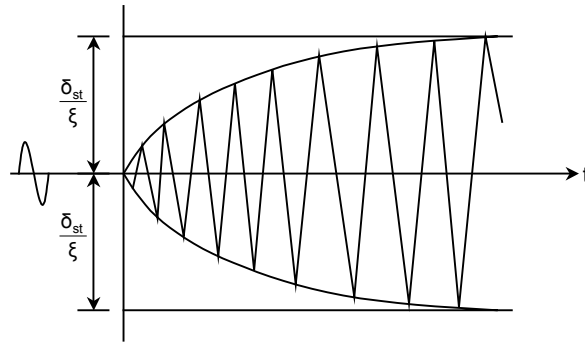


Fig.2.3.4 Time history of vibration in case of damping system

これは、過去から現在までの振動波の和が共振であるということを示しており、無減衰振動の場合と、過去の変位が減衰の影響で減少することを除いて同じである。Fig.2.3.5 にその様子を示すが対数減衰率はこの隣接した波項の比を自然対数化したものである。

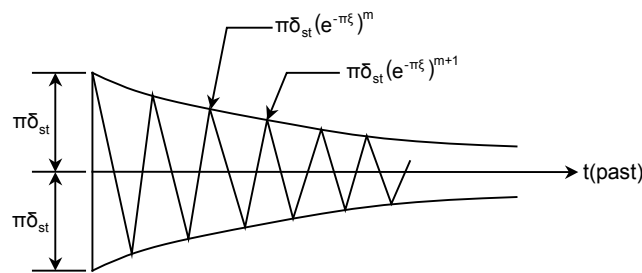


Fig.2.3.5 Time history of vibration component for damping system in resonance

2.3.2 定義

対数減衰率 (δ)、動倍率 (π/δ)、動粘性減衰、構造減衰の 4 項についてとりまとめる。

(1) 対数減衰率 (δ)

振動系の自然減衰を横軸に時間、縦軸に振動変位 (Fig.2.3.3 参照) をとったときの変位の時系列において変位の比の自然対数値で与えるもの。振動の応答特性を間接的に示す。また減衰データの収集、整理のために多用される。

(2) 動倍率 (π/δ)

系の静的変位に対し同調時の応答倍率を与える。無次元減衰比 ξ と δ (すなわち対数減衰率) との間に

$$\frac{1}{\xi} = \frac{\pi}{\delta} \quad (2.3.19)$$

の関係を有し、振動の応答特性を直接的に示す指標として用いると同時に減衰データの収集、整理のために用いられる。

(3) 動粘性減衰

質量－バネ－ダッシュポット系において速度に比例する力を生じさせるもので次式第 2 項が対応する。

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \quad (2.3.20)$$

ビームの横振動において、減衰を表すために現在に到るも使用されている。ビームの振動については次式のように表現される左辺第 3 項が相当する。

$$\bar{m} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \left(1 + \alpha \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = F(x, t) \quad (2.3.21)$$

α は [s] の次元を有する。

(4) 構造減衰

質量－バネ－減衰系で表示すれば次式で与えられる左辺第 3 項に対応する。

$$\bar{m}\ddot{x} + k(1 + i\gamma)x = f(t) \quad (2.3.22)$$

ビームの横振動については上式のアナロジーから

$$\bar{m} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI(1 + i\gamma) \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = F(x, t) \quad (2.3.23)$$

で与えられる。 γ 導出の根拠については付録 2.3 参照。

2.4 構造減衰を考慮したビームの曲げ振動

これまで船体振動予測には、基礎振動方程式として次式が用いられてきた。

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \left(1 + \alpha \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = F(x, t) \quad (2.4.1)$$

ここで m : ビーム単位長さ当たり質量 [kg/m]

y : ビームのたわみ [m]

EI : 曲げ剛性 [N・m²]

$F(x, t)$: 分布外力 [N/m]

t : 時間 [s]

振動における応答は基本的に減衰項によって規定される。(2.4.1)式の場合左辺第3項がそれに対応するが、時間微分となっており、振動速度依存性を示す。いわゆる動粘性効果を考慮したものである。(2.4.1)式は船舶に限らずビームの横振動方程式として多くの教科書に採用されている。その論拠は明示されていないが、構造要素中に分布したダッシュポットを仮定すると付録2.4に示すように(2.4.1)式が導かれる。

一方、船体を構成する鋼材の減衰には、速度依存性はなく[5]、構造減衰すなわち歪依存性を示す。減衰を発散エネルギー(U_d)として表現すると次のように与えるのが一般的である。

$$U_d = A\varepsilon^2 \quad (2.4.2)$$

ここで ε : 構造要素に生じる歪 [無次元]

A : 材料定数 [N・m⁻²]

構造減衰を考慮したビームの横振動は付録2.3に示す質量－バネ－構造減衰のアナロジーから、一般に次式が与えられる。

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI(1 + i\gamma) \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = F(x, t) \quad (2.4.3)$$

ここで γ : 構造減衰定数 [無次元]

本節では(2.4.3)式がビーム曲げ振動のうち1節振動に対応するものであり、 n 節振動では

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI(1 + in\gamma) \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = F(x, t) \quad (2.4.4)$$

で与えられるべきであることを示す。

2.4.1 振動波動の特性

有限長 l のビームであったとしても振動は有限の波動速度をもって伝播し、端部で反射を繰り返しながら移動する。

今 (2.4.3) あるいは (2.4.4) の構造減衰 γ を無視し、外力 $F(x, t) = 0$ の場合の解を

$$y(x, t) = \phi(t) \cos \frac{n\pi}{l} \cdot x \quad (2.4.5)$$

おけば、解は一般に次式で与えられる（詳細は付録 2.5 参照）。

$$\begin{aligned} y(x, t) &= A \cos \frac{n\pi}{l} x \cos \omega_n t \\ &\sim \cos \frac{n\pi}{l} (x - v_n t) \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

ここで ω_n 、 v_n は各々次式で与えられる。

$$\omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (2.4.6)'$$

$$v_n = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (2.4.7)$$

n 節振動の固有周期 T_n は

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad (2.4.8)$$

であり、一周に波の進む距離 l_n は

$$l_n = \frac{2l}{n} \quad (2.4.9)$$

である。波動が $x=0$ を出発、 $x=l$ で反射して原点まで戻ってくるのに要する時間 T は次式で与えられるものとなる。

$$T = nT_n \quad (2.4.10)$$

すなわち、 n 節振動の場合、波動の往復に要する時間は固有周期 T_n の n 倍を要する。

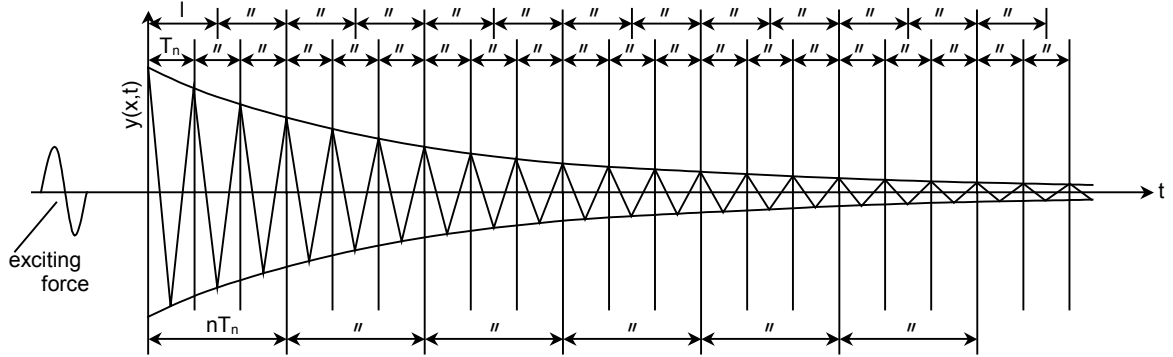


Fig.2.4.1 Time flow of vibrating waves

Fig.2.4.1 に示すように波動は 1 波長すなわち T_n 毎に $e^{-\pi\gamma}$ ずつ減衰していく。しかし波動の端部での反射を考慮すると、 n 節振動では $e^{-n\pi\gamma}$ ずつ減少したものの重ね合わせで共振状態は表現されなければならない。Fig.2.4.1 は 3 節振動を例として示してある。

すなわち、共振時の n 節振動の変位 y_{res} は

$$y_{res} \sim \sum_{k=0}^{\infty} e^{(-n\pi\gamma)k} \quad (2.4.11)$$

の形で与えられなければならない。

2.4.2 振動方程式

ビームの構造減衰を考慮した n 節振動方程式が (2.4.4) 式で与えられなければならないことを示す（詳細は付録 2.5 参照）。式を再記すると

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI(1 + in\gamma) \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = F(x, t)$$

今解を (2.4.5) 式の形で与えられるとすると、式を整理することにより次式が与えられる。

$$\ddot{\phi} + \omega_n^2(1 + in\gamma)\phi = \frac{f_0}{M} e^{i\omega t} \quad (2.4.12)$$

(2.4.12) 式を解くと $\phi(t)$ は次のように求められる。

$$\phi(t) = \frac{f_0}{M} \cdot \frac{1}{in\gamma \cdot \omega_n^2} e^{i\omega_n t} \left(1 - e^{-\frac{n\gamma}{2}\omega_n t} \right) \quad (2.4.13)$$

ここで M : 等価ビーム質量 ($=ml/2$) [kg]

f_0 : 端部集中起振力 [N]

波項の時間的経過に関心があるので時間 t を波項に対応する次式で与える。

$$t = \frac{2\pi}{\omega_n} m \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.4.14)$$

このとき $\phi\left(\frac{2\pi}{\omega_n} \cdot m\right)$ は次のように整理できる。

$$\phi\left(\frac{2\pi}{\omega_n} \cdot m\right) = -i\pi\delta_{st \cdot n} \sum_{m=0}^{m-1} \left(e^{-n\pi\gamma}\right)^m \quad (2.4.15)$$

(2.4.15)式は n 波項目毎の和を表しており (2.4.11)式と同一の表現式となっている。したがって n 節振動の場合の振動方程式は (2.4.4)式で与えられ、1 節振動に対応した (2.4.3)式も包含することが確認された。

2.5 高次振動領域への振動方程式の拡張

船舶において問題となる $10^{\text{Hz}} \sim 20^{\text{Hz}}$ の振動領域は、主船体振動に関しては高次振動（節数でいえば 5 節以上）の領域にあり、曲げ変形のみならず剪断変形、回転慣性の影響を考慮しなければならない。

今曲げによるビームの回転角を ψ 、曲げ変形および剪断変形による合計のたわみを y とし、構造減衰を考慮したときの振動方程式は次式で与えられる。詳細な式の展開を付録 2.6 に示す。

$$\left[EI \{1 + in(\gamma_b + \gamma_s)\} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - m \left\{ \frac{EI}{k'GA} (1 + in\gamma_b) + r^2 (1 + in\gamma_s) \right\} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} + m(1 + in\gamma_s) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{m^2 r^2}{k'GA} \frac{\partial^4}{\partial t^4} \right] \left\{ \begin{matrix} y \\ \psi \end{matrix} \right\} = 0 \quad (2.5.1)$$

ここで EI : 曲げ剛性 $[\text{N} \cdot \text{m}^2]$

$k'GA$: 剪断剛性 $[\text{N}]$

γ_b : 曲げ変形に対する構造減衰率 [無次元]

γ_s : 剪断変形に対する構造減衰率 [無次元]

$y(x, t)$: ビームのたわみ $[\text{m}]$

$\psi(x, t)$: 曲げによる回転角 [無次元]

m : 単位長さ当たりの質量 $[\text{kg} \cdot \text{m}^{-1}]$

r : 断面の回転半径 $[\text{m}]$

(2.5.1)式に次式のたわみ式を仮定して代入する。

$$y(x, t) = y_n \cos \frac{\lambda_n}{l} x \cdot e^{(i\omega_n - \varepsilon_n)t} \quad (2.5.2)$$

ここで $\lambda_n = n\pi$

計算式を展開することにより円固有振動数 ω_n と等価減衰係数 ε_n は各々次のように導かれる（付録 2.7 参照）。

$$\omega_n = \frac{\lambda_n^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m} \frac{1}{1 + (\alpha + \beta)\lambda_n^2}} \quad (2.5.3)$$

$$\varepsilon_n = \frac{n}{2} \frac{\gamma_b + (\alpha\gamma_s + \beta\gamma_b)\lambda_n^2}{1 + (\alpha + \beta)\lambda_n^2} \omega_n \quad (2.5.4)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{EI}{k'GA l^2} & [\text{無次元}] \\ \beta &= \frac{r^2}{l^2} & [\text{無次元}] \end{aligned} \right\} \quad (2.5.5)$$

n 節振動の対数減衰率 δ_n は、したがって次のように与えられる。

$$\delta_n = \pi n \left\{ \frac{\gamma_b + (\alpha\gamma_s + \beta\gamma_b)\lambda_n^2}{1 + (\alpha + \beta)\lambda_n^2} \right\} \quad (2.5.6)$$

γ_b と γ_s 間には、微小要素のつり合いより次の関係が導かれる。

$$\gamma_s = (1 + \nu)\gamma_b \quad (2.5.7)$$

ここで ν : ポアソン比 (=0.3)

(2.5.7)式を(2.5.6)式に代入することにより対数減衰率 δ_n は

$$\delta_n = \pi n \gamma_b \left\{ 1 + \frac{\alpha \nu \lambda_n^2}{1 + (\alpha + \beta)\lambda_n^2} \right\} \quad (2.5.8)$$

として与えられる。

2.6 実験および数値的検証

一般に鋼材の振動減衰を対数減衰率(δ)として無次元化すると、振動数に無関係に一定値を示すといわれている。一方、船体振動においては、バラツキは非常に大きいものの、Fig.2.6.1に動倍率の形で表した実験結果で示すように振動数にほぼ逆比例する動倍率(π/δ)となること、対数減衰率(δ)でいえば振動数に比例する関係を有することから貨物や海洋へ発散するエネルギーを含めて周波数に比例する対数減衰を与える振動方程式を採用してきた。

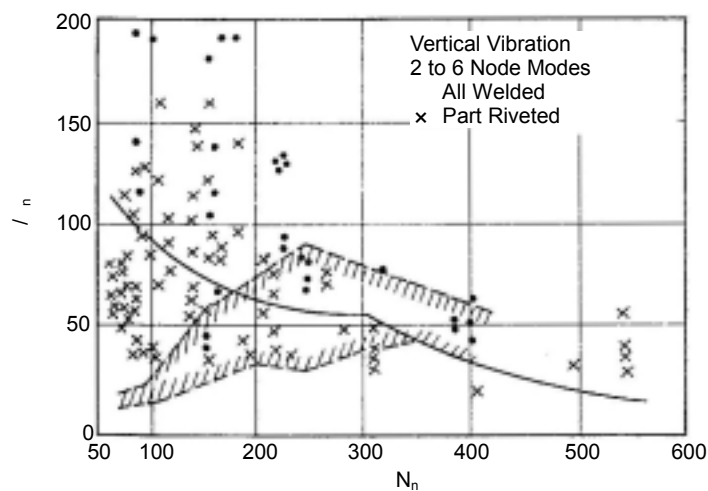


Fig.2.6.1 Relation between magnification factor (π / δ) and vibration frequency (Johnson)

構造減衰といわれる歪依存で振動数に無関係な特性を有する材料によって構成される船体構造が周波数依存性を示す理由については 2.4 節および 2.5 節で述べたが本節では、

- 同一モードでは周波数に関係なく一定の対数減衰率(δ)を与える
- 振動モードが異なればその振動節数にほぼ比例した形で対数減衰率(δ)は変化する

ことを確認するため実験および数値的検証を行う。

2.6.1 実験（その1 片持梁）

Fig.2.6.2 に示す平板を片持梁として自由端に強制変位を与え、変位の拘束を瞬時にはずして自然減衰振動させることにより対数減衰率を計測した。なお、平板のみの場合と、平板の長さ方向に溶接した溶接部材の両者について実験した。

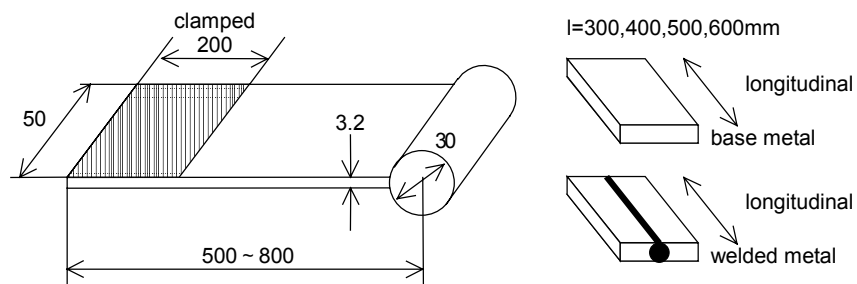
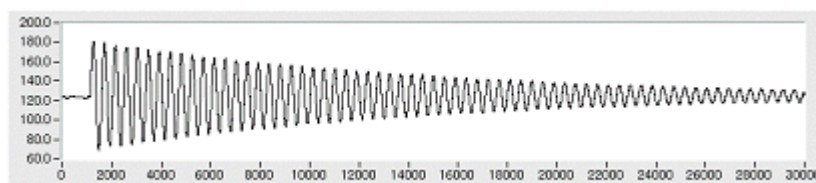
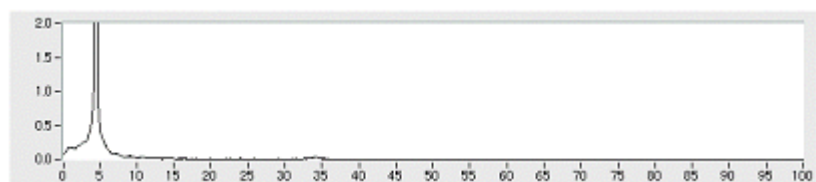


Fig.2.6.2 Test specimen for measurement in air

実験においては、高次の振動成分発生を防止するため、自由端に集中質量として丸鋼を配置した。その結果 Fig.2.6.3 に一例を示すように高次振動成分の発生は防止された。



(a) Time history of vibration decrement



(b) Distribution of eigen frequency

Fig.2.6.3 Example of experimental result

Photo 2.6.1 に空中振動実験の様子を示す。

実験は片持梁のスパンを 300,400,500,600mm の 4 種類として振動数による対数減衰率 (δ) の変化を計測した。Table 2.6.1 に計算振動数と実測振動数の比較を示す。



Photo 2.6.1 Specimen and instrument for measurement in air

Table 2.6.1 Calculated and measured frequency (Hz)

Span l (mm)		300	400	500	600
in air	Calculated	14.7	9.2	6.3	4.7
	Measured	13.8	8.6	6.0	4.5

Fig.2.6.4 に母材（溶接ビード無し）と溶接ビード付き平板の対数減衰率 (δ) を示す。溶接ビードの有無による対数減衰率 (δ) の違いは小さく、その差は無視できる。また振動数の変化による対数減衰率 (δ) の変化は見られず構造減衰の特徴を有する。

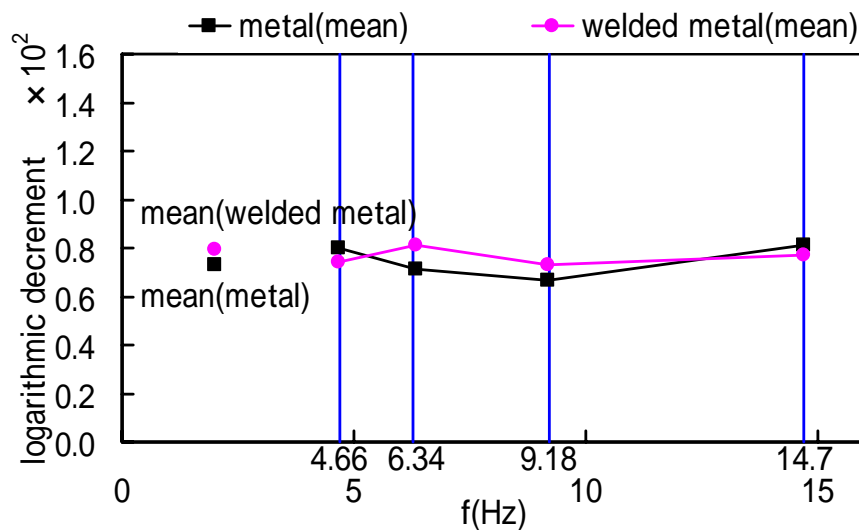


Fig.2.6.4 Logarithmic decrement for base and welded metal in air

さらに、接水振動時の減衰挙動を調査するために、平板両面に25mm深さのウレタン材を貼付した場合の実験を行った。

ウレタン材貼付の目的は、

- 接水振動時、平板の水面からの跳ね上がりによる水面衝撃を防止すること
- 異物質貼付による対数減衰率 (δ) の周波数依存性発生の有無確認

である。

Fig.2.6.5 に鋼材平板へのウレタン貼付状況を示す。このときウレタンによる減衰効果を緩和するため20mmピッチで深さ20mmの切り目を入れ、接水振動時切れ目への水の流出入を防止するためサランラップでカバーし、さらにウレタン幅は接水振動時の付加質量を変化させるため50mmと100mmとした。なお、片持梁の長さは平板のみの場合と同様、300,400,500,600mmの4種類である。各片持梁長さに対する固有振動数はTable 2.6.1に示す結果とほとんど変わらずウレタン貼付による剛性の変化は無視できることを確認している。

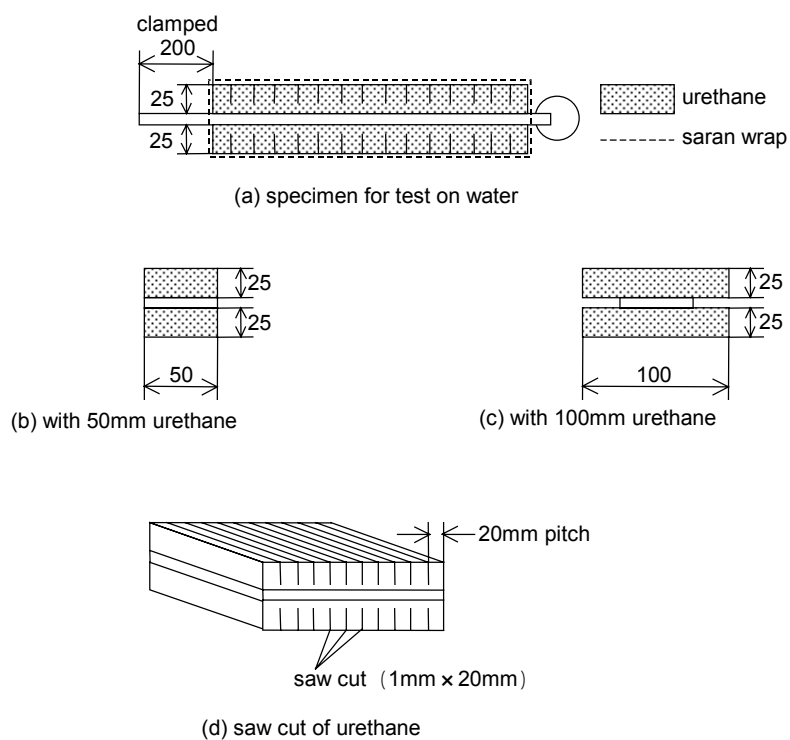


Fig.2.6.5 Test specimen for measurement on water

Fig.2.6.6 にウレタン幅 100mm の場合、Fig.2.6.7 にウレタン幅 50mm の場合の振動数に対する対数減衰率 (δ) の変化を示す。

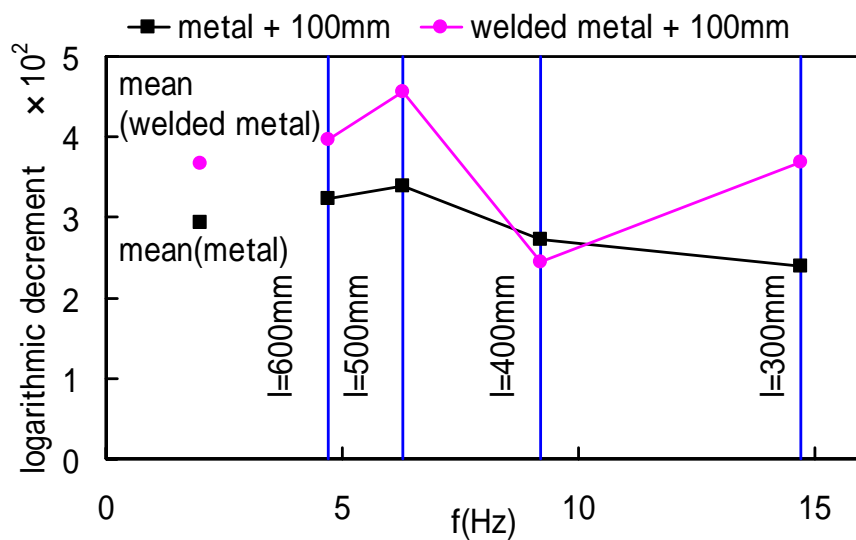


Fig.2.6.6 Logarithmic decrement for vibration in air
with 100mm urethane

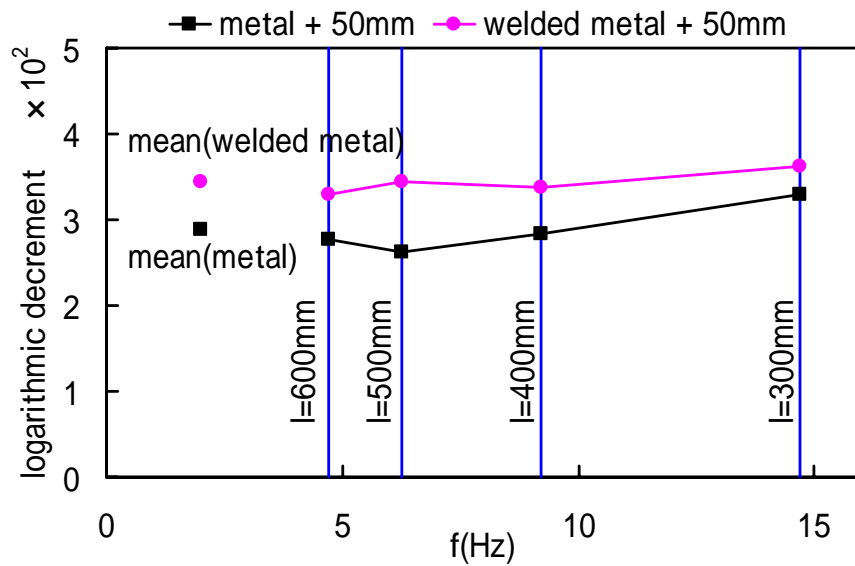


Fig.2.6.7 Logarithmic decrement for vibration in air
with 50mm urethane

Fig.2.6.6 および Fig.2.6.7 に示す結果を要約すると、

- バラツキは見られるものの対数減衰率 (δ) は振動数に関係なくほぼ一定
- 溶接材の方が母材のままの場合よりも幾分高めの対数減衰率 (δ) を与える
- ウレタン貼付により鋼材のみの場合に比較して 3 倍程度大きな対数減衰率 (δ) を与えるが、ウレタン幅 50mm と 100mm で比較すると両者ほぼ同じ値を示す

という結果を得た。

このように本実験からは対数減衰率 (δ) の周波数依存性は見出されず、構造減衰的挙動すなわち同一モードであれば周波数に関係なく一定の対数減衰率 (δ) を与えることが確認された。

2.6.2 実験（その 2 両端自由ビーム）

Photo 2.6.2 に示すように薄いビニール袋内の圧力を大気圧と同

程度として溝型鋼を支持し，端部に周期的起振力を与えて十分に同調させた後起動力をとりさり自然減衰させることにより両端自由ビームの減衰特性を調査した。

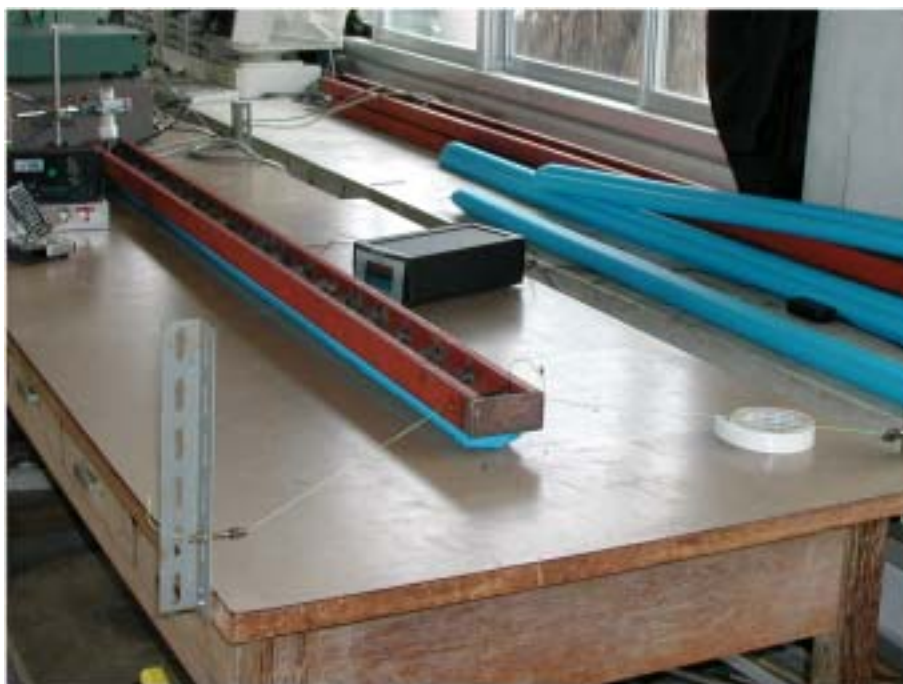


Photo 2.6.2 Model settlement on air cushion

実験に用いた溝型鋼の形状を Fig.2.6.8 に示す。

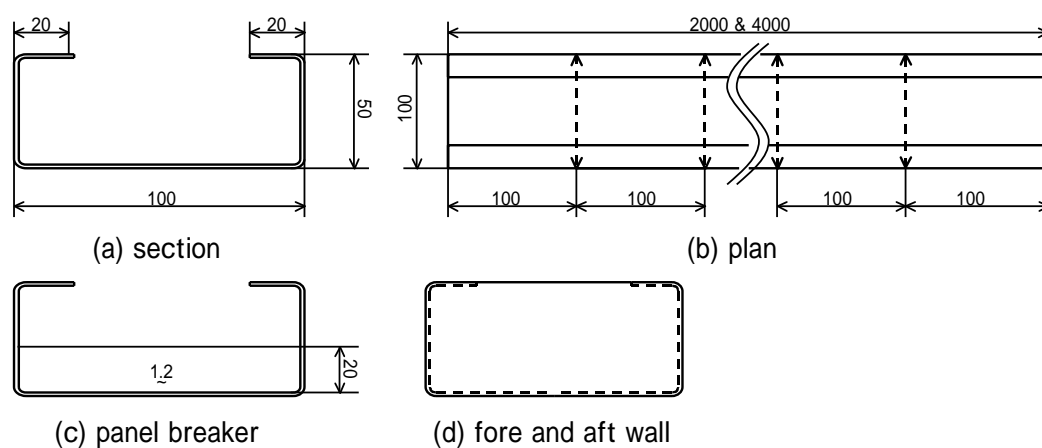


Fig.2.6.8 Test specimen for vibration measurement

実験に用いたビームの長さは 2m と 4m であり振動節数と対数減衰率の関係を Fig.2.6.9 に示す。対数減衰率 δ は振動節数と正比例関係にあり，振動数と直接関係ないことは当然同一節数で振動数が変化する 2m と 4m のビームがほぼ同一の値をとることからわかる。なお，Fig.2.6.9 には 2.6.1 で記述した片持梁の実験結果を振動節数 1 のところにプロットしている。これもよく線上にあることがわかる。

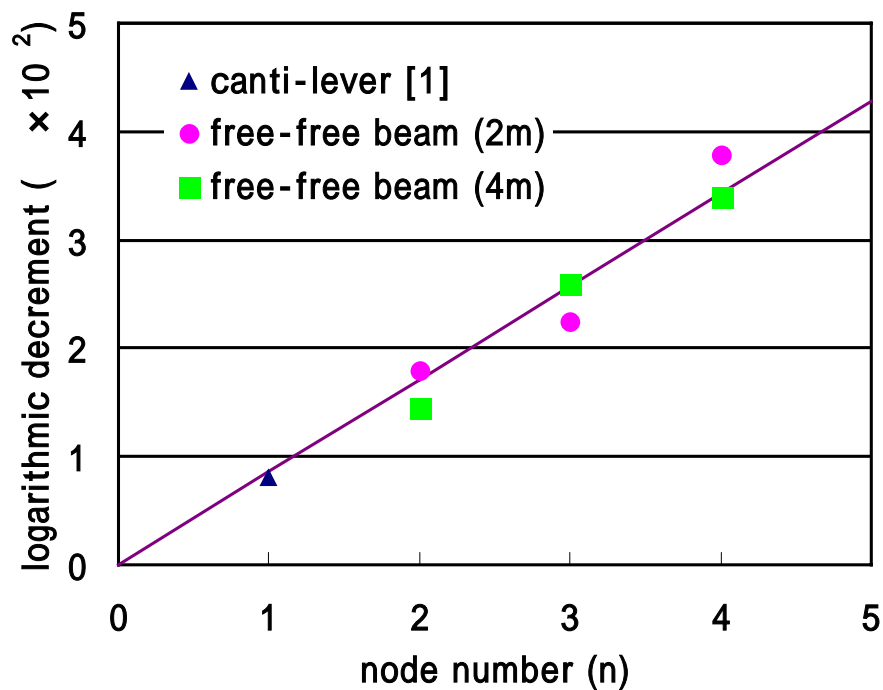


Fig.2.6.9 Relation between logarithmic decrement and nodal number (in air vibration)

2.6.3 数値的検証

熊井は船舶振動における減衰を動粘性減衰によるものとして次式で与える振動方程式を導いている。

$$\left[EI \left(1 + \mu \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(1 + \nu \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^4}{\partial x^4} - m \left\{ \frac{EI}{k'GA} \left(1 + \mu \frac{\partial}{\partial t} \right) + r^2 \left(1 + \nu \frac{\partial}{\partial t} \right) \right\} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} + m \left(1 + \nu \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{m^2 r^2}{k'GA} \cdot \frac{\partial^4}{\partial t^4} \right] \left\{ y \right\} = 0 \quad (2.6.1)$$

ここで EI : 曲げ剛性 $[\text{N} \cdot \text{m}^2]$

$k'GA$: 剪断剛性 $[\text{N}]$

μ : 曲げ変形に対する動粘性減衰率 $[\text{s}]$

ν : 剪断変形に対する動粘性減衰率 $[\text{s}]$

$y(x, t)$: ビームのたわみ $[\text{m}]$

$\psi(x, t)$: 曲げによる回転角 $[\text{無次元}]$

m : 単位長さ当たりの質量 $[\text{kg} \cdot \text{m}^{-1}]$

r : 断面の回転半径 $[\text{m}]$

さらに、円固有振動数 (ω_n) と対数減衰率 (δ_n) を各々次のように与えている。

$$\omega_n = \frac{\lambda_n^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m} \frac{1}{1 + (\alpha + \beta) \lambda_n^2}} \quad (2.6.2)$$

$$\delta_n = \frac{\mu + (\alpha \nu + \beta \mu) \lambda_n^2}{1 + (\alpha + \beta) \lambda_n^2} \pi \omega_n \quad (2.6.3)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{EI}{k'GA l^2} & [\text{無次元}] \\ \beta &= \left(\frac{r}{l} \right)^2 & [\text{無次元}] \\ \lambda_n &= n\pi \end{aligned} \right\} \quad (2.6.4)$$

(2.6.2)式は(2.5.3)式と同一の結果となっている。対数減衰率 (δ_n) は (2.6.3)式で明らかのように ω_n にほぼ比例する関係を与える。

ここでは熊井の方法による対数減衰率 (δ_n) と構造減衰を考慮した場合の(2.5.6)式との比較を行う。

比較の対象船として大型、中型、小型船の3隻（ケーブサイズバルクキャリア、アフラマックスタンカー、ガス船）を選んだ。Table 2.6.2 に対象船のデータを示す。

Table 2.6.2 Principal dimension and data in use

Ship type		Cape size B.C.	Afra max T.	Gas carrier
Principal Dimension	L (m)	279.00	232.00	148.00
	B (m)	45.00	42.00	25.00
	D (m)	24.40	21.20	16.50
	d (m) : ballast condition	7.63	7.21	6.40
moment of inertia I (m ⁴)		591.9	353.6	71.55
shear area A_s (m ²)		1.47	1.61	0.601
displacement Δ (ton)		7.747×10^4	5.53×10^4	1.54×10^4
correction factor depending on ship type C_n		0.769	0.748	0.748
radius of gyration $r = \sqrt{\frac{I}{A}}$ (m)		10.3	8.23	6.65
block coefficient C_b		0.789	0.768	0.634
structural damping γ		2.55×10^{-3}		
damping coefficient against bending μ (s) (kumai)		1.7×10^{-3}		
damping coefficient against shearing ν (s) (kumai)		0.45×10^{-3}		

Fig.2.6.10 にこれら 3 サイズの船の対数減衰率 (δ)を振動数を横軸にして示す。

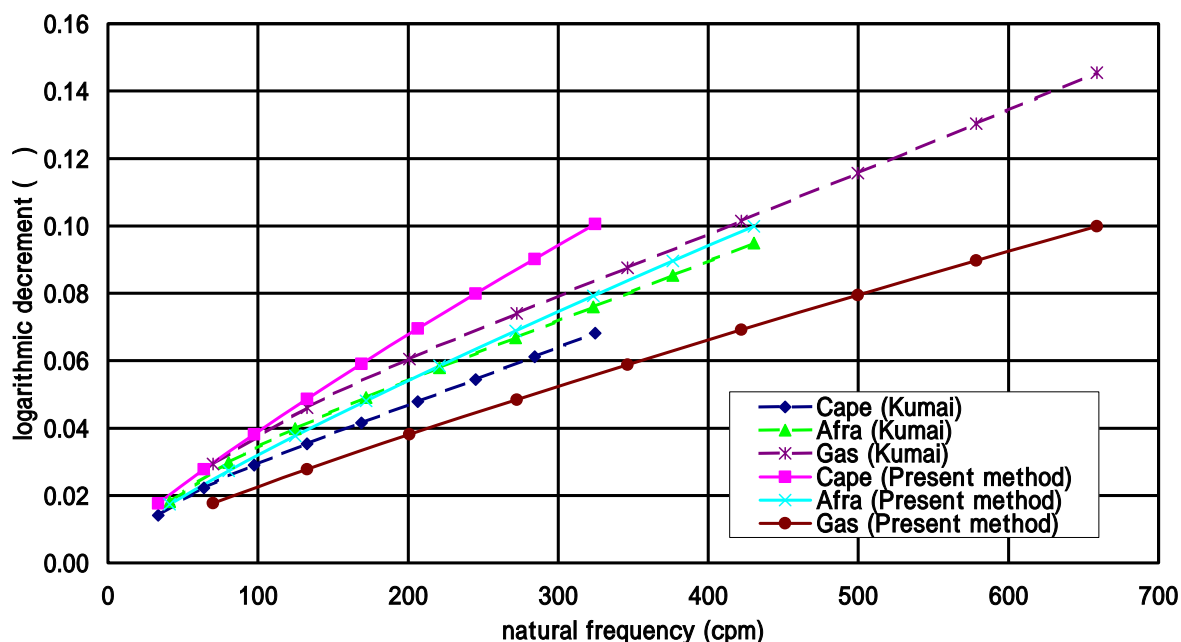


Fig.2.6.10 Relation between natural frequency
and logarithmic decrement

熊井の方法によれば対数減衰率 (δ) は円固有振動数 (ω_n) したがって船体の振動数にほぼ比例して変化する。大型船は小型船に比較して各節の振動数が低くなるため、対数減衰率 (δ) はケーブサイズバルクキャリア (大型) → アフラマックスタンカー (中型) → ガス船 (小型) の順で増加していく。

一方、本論文の方法によれば船のサイズに関係なくほぼ同一の傾向を示す。

Fig.2.6.11 に振動節数を横軸に 3 隻の対数減衰率 (δ) の変化を示す。本論文の方法によれば船のサイズに関係なくほぼ同一の変化を示すが、熊井の方法によれば船のサイズにより対数減衰率が変化する。Fig.2.6.1 に示す動倍率 (π/δ) のバラツキは、振動節数を横軸に整理できていれば改善ができていたものと考えられる。

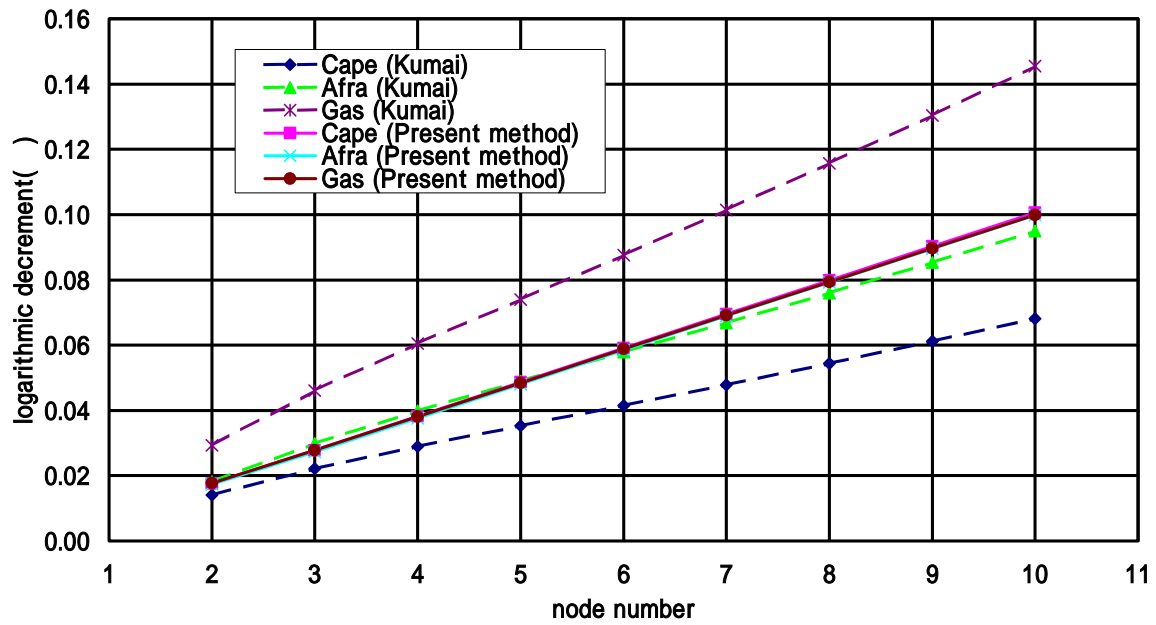


Fig.2.6.11 Relation between node number
and logarithmic decrement

2.7 結言

2 章では船舶振動の支配的要素となる主船体の振動応答特性に焦点を絞り、慣例的に用いられ、かつ振動教科書にも記載されている振動方程式について、その問題点を明らかにするため、振動問題の基本となる質量－バネ－減衰モデルを用いて分析を行い、主船体曲げ振動の基本モデルとなるビームの横ぶれ（曲げ）振動における波動特性について検討を行った。

この検討結果から波動特性を考慮した場合のあるべき振動方程式を導きさらに高次振動（高節振動）領域へ振動方程式を拡張した。船体構造を構成する鋼材の減衰特性は、動粘性効果を示す振動速度依存性を示すのではなく、振動速度に依存しない構造特性にあるが、このことを確認する基礎実験を行い、さらに慣例的に用いられる動粘性結果を考慮した振動方程式と今回提案する構造減衰を考慮した場合との数値的比較を行った。

2 章での結果を総括すると以下のとおりである。

(1) 振動応答の基本的特性

振動問題の基本的モデルである質量－バネ－減衰（動粘性あるいはダッシュポット）系に周期的起振力が働く場合について分析を行い、共振とは、

- イ． 瞬時に共振に到るものでなく、理論的には無限の繰り返しの後に共振値に漸近する
- ロ． 過去の振動履歴の累積が共振を形成する

ことを示した。

(2) 構造減衰と動粘性減衰

構造減衰と動粘性減衰をエネルギー的に等置することにより構造減衰を表現する基本的振動方程式を示した。

(3) 構造減衰を考慮した場合の振動方程式の特性

主船体横ぶれ（曲げ）振動をビームの振動問題に置き換えて考察した。まず振動波形は一端から発した波動が他端で反射し、その繰り返しの累積結果であることを明らかにし、波動速度を考慮した場合、 n 節振動では n 波毎の波動振幅の累積が振動波型を形成することを明らかにした。そしてこのことを考慮した場合の振動基本方程式が

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI(1 + in\gamma) \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = F(x, t)$$

で与えられることを明らかにした。

(4) 高次振動領域への拡張

ビームの振動の波動性と構造減衰特性を考慮した高次振動領域まで包含するビームの振動方程式を導いた。高次振動領域では曲げ変形に加えて剪断変形さらに断面の回転慣性が影響を与えるが、この両者を含めた振動方程式として与えた。

(5) 実験および数値的検証

4 種類の長さの片持梁の自然減衰振動実験を行い、振動数の違いによる対数減衰率の変化を調査した。実験の結果同一モードでは振動数に関係ない一定した対数減衰率を与える構造減衰の特性を有することを明らかにした。

さらに 2m と 4m の長さを有する溝型鋼の空中振動実験を行い、対数減衰率が振動節数に比例することを実験的に確認した。

このことから従来用いられてきた対数減衰率の振動速度（振動数）依存性は物理的根拠が薄弱なこともあり、今回提案する構造減衰を考慮した振動方程式を用いるべきことを示した。

また、高次振動までを包含する従来の振動方程式（熊井の式）と提案する振動方程式を用いて船のサイズをほぼ包含する 3 種類の船舶に対して比較計算を行い、提案する方程式を用いれば対数減衰率は船のサイズ（したがって振動数の違い）に関係なく節数にほぼ比例する形で変化することを示した。従来式では船のサイ

ズにより対数減衰率は各々異なった傾向を与え、これが従来の対数減衰率データのバラツキの原因の一つでありうることを示した。

第 3 章

複合振動場における付加質量および流体減衰力

3.1 序言

3.1.1 概要

海洋上を航行する船舶がプロペラや主機関から生じる起振力により振動を生じる場合，船体の振動により環境としての流体も振動する。この流体振動により流体は運動エネルギーを発生させる。その量は船体そのものの運動エネルギーの数倍にも達するといわれている。

一方，船舶は主船体の振動に加えて二重底構造等との連成振動も生じ，現象を複雑にする。いわゆる複合振動場における流体運動エネルギーの定量的推定が必要となる。

この流体運動エネルギーを主船体の振動レベルで表現したとき表れるのが付加質量という物理量である。

本章では複合振動場における付加質量の推定法について述べ，この付加質量あるいは流体運動エネルギーと密接な関係を有する流体減衰エネルギーについて記述することとする。

3.2 においては船舶環境としての流体場を完全流体場として考えポテンシャル場を設定し，このポテンシャル場から流体付加質量を求める方法について述べる。

また Rayleigh の速度に比例する抵抗の概念をこの完全流体場に適用することにより時間あたりの流体減衰エネルギーを算出する方法について述べ，かつ，付加質量と時間あたりの流体減衰エネルギー間の関係を明らかにする。

さらに複合振動場における付加質量の生成について述べ，主船体付加質量と二重底振動による付加質量に加えて，主船体と二重底の連成付加質量発生条件について述べる。

3.3 においては振動により生じる船底に沿直方向の流体速度が，船の幅方向に放物線状に分布する場合の二次元速度ポテンシャル

の導出法について記述する。船の幅方向に均等な速度分布の場合については既に計算法が明らかにされているが，放物線分布への拡張を試みる。

3.4においては3.3で明らかとなった二次元付加質量計算法を三次元問題に拡張する。三次元問題とは船の長さ方向に流体が拡散することによる影響を評価することであり船の長さにわたって分布する振動波形による拡散効果についてその計算法を明らかにする。

3.5においては3.4で明らかにした三次元流体拡散効果を三次元修正係数という計算に適用しやすい形で表現する。すなわち二次元付加質量に三次元影響を考慮した係数を掛けることにより付加質量に及ぼす三次元効果を振動計算に取り込む方法である。

3.6 においては実験および数値計算による検証を行う。まず時間あたり減衰エネルギー計算に必要な Rayleigh の速度に比例する抵抗 λ について実験的にそのオーダーを明らかにする。ひきつづき，船のサイズをほぼ網羅する 3 隻の船舶に対して二次元付加質量の計算を行い，主船体単独，二重底単独振動の場合の付加質量に加えてこれらの連成による付加質量を明らかにする。さらに付加質量の三次元修正係数について計算を行い，振動モードによる，また連成効果による三次元修正係数の変動特性について明らかにする。

3.7 においては 3 章のまとめと全体的考察を行う。

3.1.2 本章で用いられる記号とその説明

T	: 三次元流体場の運動エネルギー [$\text{N} \cdot \text{m}$]
D	: 三次元流体場における時間あたり 減衰エネルギー [$\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$]
$\phi(x, y, z, t)$: 速度ポテンシャル [$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$]
$\psi(x, y, z, t)$: 流れ関数 [$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$]
$\bar{\phi}(x, y, z)$: これに速度を掛け合わせるにより 速度ポテンシャルを与える関数 [m]
$\dot{\delta}(t)$: 速度の代表値 [$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$]
M_ℓ	: 三次元付加質量 [kg]
m_ℓ	: 二次元付加質量 [$\text{kg} \cdot \text{m}^{-1}$]
λ	: 二つの意味で使われている。 一つは Rayleigh の速度に比例する抵抗係数 [s^{-1}] として 別には船の半幅 b と吃水 d の比值 [無次元] として。
ρ	: 流体の密度 [$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$]
S	: 船の断面半幅あたりの没水断面積 [m^2]
b	: 船の半幅 [m]
d	: 船の吃水 [m]
σ	: 没水断面積比 ($=S/bd$) [無次元]
b_0	: 船体断面形状を円に写像する場合の半径 [m]
r	: 原点からの距離
ξ	: 写像円の半径 b_0 と船の半幅 b との比 [無次元]
η	: 船底に沿直方向の振動速度の船の幅方向への変化を与える 指標値 [無次元] として用いる場合と, 付加質量と 合計質量の比として用いる場合の二つある
γ	: 構造減衰係数 [無次元]
δ	: 対数減衰率 [無次元]
J_{ij}	: 付加質量三次元修正係数 [無次元]

3.2 ポテンシャル場における付加質量および流体減衰力

船体振動によって流体に生じる時間変動の速度場は船の排水量に数倍する付加質量効果を与えるにもかかわらず，流体場を完全流体として仮定するため減衰力は生じないものとしてこれまで取り扱われてきた。

一方，自由表面を有するタンク内流体については周期的外力により同調現象（スロッシング）が生じる。

このようなスロッシング問題をポテンシャル問題として解析するとき，Rayleigh によって導入された速度に比例する抵抗の概念を用いることにより，応答を有限に押さえ有用な結果を与えることが示された[28]。筆者もこの概念を用いたタンク内流体のスロッシング解析を行い，実験結果と良好な一致をすることを報告した[21]。

本節では，船体振動による流体場が保有する運動エネルギー量と Rayleigh の概念を用いた場合の流体減衰エネルギーを導き，この両エネルギーと付加質量の関係について明らかにする。

3.2.1 流体運動エネルギーと付加質量の関係

今 Fig.3.2.1 に示すような流体場において，船体振動により流体に速度ポテンシャル場 $\phi(x,y,z,t)$ が生じるものとする。

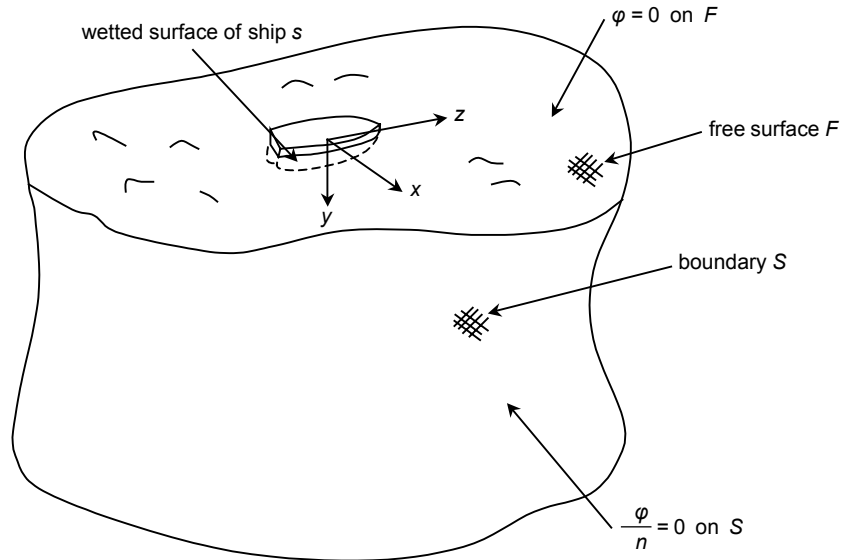


Fig.3.2.1 Boundary of liquid surrounding ship and coordinate system

Green の定理

$$\int_V (\nabla U \cdot \nabla V + U \Delta V) dv = \int_S U \frac{\partial V}{\partial n} d\bar{S} \quad (3.2.1)$$

に対して $U=V=\phi$ とおけば完全流体は Laplace の方程式 $\Delta\phi=0$ を満足しなければならないので次のように運動エネルギー T が与えられることになる。

$$\begin{aligned} T &= \frac{\rho}{2} \int_V (\Delta\phi)^2 dv = \frac{\rho}{2} \int_{\bar{S}} \phi \frac{\partial\phi}{\partial n} d\bar{S} \\ &= \frac{\rho}{2} \int_s \phi \frac{\partial\phi}{\partial n} ds + \frac{\rho}{2} \int_F \phi \frac{\partial\phi}{\partial n} dF + \frac{\rho}{2} \int_S \phi \frac{\partial\phi}{\partial n} dS \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

ここで (3.2.1) 式および (3.2.2) 式で用いられている記号の意味は次のとおりである。

s : 船体表面 [m^2]

F : 自由表面 [m^2]

S : 流体境界面 [m^2]

\bar{S} : 境界全表面 ($=s+F+S$) [m^2]

ρ : 流体密度 [$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$]

ϕ : 速度ポテンシャル [$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$]

自由表面における境界条件は次のように与えられる。

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{\omega^2}{g} \phi \bigg|_{y=0} \rightarrow \phi = 0 \big|_{\text{on } F} \quad (3.2.3)$$

ここで ω : 流体場に伝達される船体円固有振動数 [s^{-1}]

しかし振動問題においては自由表面における y 方向速度 $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ が小さく、

円固有振動数 ω は大きいため (3.2.3) 式に示すように $\phi = 0$ が用いられる。

一方無限遠での流体境界面に対しては境界面に鉛直方向の速度 $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ は非常に小さく

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{\text{on } S} = 0 \quad (3.2.4)$$

と考えるとよい。

(3.2.3) 式および (3.2.4) 式を考慮することにより流体場の運動エネルギー T は船体表面積分のみで次のように与えられることになる。

$$T = \frac{\rho}{2} \int_s \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} ds \quad (s : \text{wetted surface of ship}) \quad (3.2.5)$$

ここで速度ポテンシャル $\phi(x, y, z, t)$ が船体振動時の変位代表値 $\delta(t)$ を用いて

$$\phi(x, y, z, t) = \dot{\delta}(t) \bar{\phi}(x, y, z) \quad (3.2.6)$$

と与えられるとする。 $\dot{\delta}(t)$ は速度の次元を有し $\bar{\phi}(x, y, z)$ は距離の次元をもつ。(3.2.6) 式を (3.2.5) 式に代入することにより運動エネル

ギーは付加質量と密接な関係を有することを示すことができる。

$$T = \frac{1}{2} \dot{\delta}^2 \rho \int_s \bar{\phi} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} ds = \frac{1}{2} M_\ell \dot{\delta}^2 \quad (3.2.7)$$

すなわち付加質量 M_ℓ は

$$M_\ell = \rho \int_s \bar{\phi} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} ds \quad (3.2.8)$$

で与えられる。振動による流体場の速度ポテンシャル $\phi(x, y, z, t)$ が与えられれば船体表面上での積分により付加質量 M_ℓ ，および運動エネルギー T が求められる。

3.2.2 流体減衰エネルギー

Reyleigh は速度 \dot{x} に比例する抵抗 $c\dot{x}$ に対して次式で与える時間あたりの発散エネルギー D を定義した。

$$D = \frac{1}{2} c \dot{x}^2 \quad (3.2.9)$$

流体の減衰抵抗にこの概念を適用すると単位体積あたりの速度に比例する対抗 R は抵抗係数を λ として次式で与えることができる。

$$R = \rho \lambda \nabla \phi = \rho \lambda \dot{\delta} \nabla \bar{\phi} \quad (3.2.10)$$

このとき，流体場全体の時間あたり減衰エネルギー D は

$$D = \frac{\rho}{2} \lambda \int_V (\nabla \phi)^2 dV = \frac{\rho}{2} \lambda \dot{\delta}^2 \int_s \bar{\phi} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} ds \quad (3.2.11)$$

(3.2.8) 式の関係を用いれば時間あたり減衰エネルギーは

$$D = \frac{1}{2} \lambda M_\ell \dot{\delta}^2 \quad (3.2.12)$$

と与えられ，付加質量 M_ℓ と密接な関係を有する。

3.2.3 複合振動場における運動エネルギーと付加質量

いま、主船体と二重底の複合振動場について考え、各々ポテンシャル関数が次式で与えられるとする。

$$\left. \begin{array}{l} \text{主船体； } \phi_1(x, y, z, t) = \dot{\delta}_1(t) \tilde{\phi}_1(x, y) \sin \frac{p\pi z}{\ell} \\ \text{二重底； } \phi_2(x, y, z, t) = \dot{\delta}_2(t) \tilde{\phi}_2(x, y) \sin \frac{q\pi z}{\ell} \end{array} \right\} \quad (3.2.13)$$

ここで $\tilde{\phi}_1(x, y), \tilde{\phi}_2(x, y)$: 長さ [m] の次元を有する

p, q : ビームおよび二重底の振動モード数

このとき運動エネルギー T は

$$T = \frac{\rho}{2} \iint (\phi_1 + \phi_2) \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right) dy dz \quad (3.2.14)$$

と与えられる。

(3.2.14)式は $p \neq q$ のとき（つまり直交関係のとき）

$$\begin{aligned} T &= \frac{\rho \ell}{2} \left[\dot{\delta}_1(t)^2 \int \tilde{\phi}_1 \frac{\partial \tilde{\phi}_1}{\partial y} dy + \dot{\delta}_2(t)^2 \int \tilde{\phi}_2 \frac{\partial \tilde{\phi}_2}{\partial y} dy \right] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \dot{\delta}_1(t)^2 M_{11} + \dot{\delta}_2(t)^2 M_{22} \right\} \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

$p = q$ のとき

$$\begin{aligned} T &= \frac{\rho \ell}{2} \left[\dot{\delta}_1(t)^2 \int \tilde{\phi}_1 \frac{\partial \tilde{\phi}_1}{\partial y} dy + \dot{\delta}_2(t)^2 \int \tilde{\phi}_2 \frac{\partial \tilde{\phi}_2}{\partial y} dy \right. \\ &\quad \left. + \dot{\delta}_1(t) \dot{\delta}_2(t) \left\{ \int \tilde{\phi}_1 \frac{\partial \tilde{\phi}_2}{\partial y} dy + \int \tilde{\phi}_2 \frac{\partial \tilde{\phi}_1}{\partial y} dy \right\} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\dot{\delta}_1(t)^2 M_{11} + \dot{\delta}_2(t)^2 M_{22} + \dot{\delta}_1(t) \dot{\delta}_2(t) (M_{12} + M_{21}) \right] \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

で与えられる。

$p \neq q$ のときにはポテンシャル間の連成はなく個々のモード毎のエネルギーの和として与えられるが、 $p = q$ のときにはポテンシャル場間の連成が生じることになる。現実には主船体振動モード p と二重底モード q には $p = q$ の関係が生じることもあるので付加質量を介した振動の連成現象が生じることになる。

3.3 二次元流体場における運動エネルギーと付加質量

3.2 節において船体振動により流体場に生じる変動速度ポテンシャル $\phi(x,y,z,t)$ が求められれば流体の運動エネルギーおよび時間あたり減衰エネルギーは付加質量を用いて求められることを示した。

三次元付加質量については主船体の曲げ振動のように断面が上下に剛体運動を起こすモードの場合について写像関数を用いた理論計算法が熊井 [17] [18] により明らかにされている。その理論展開の概要は本節の展開にも関係するので付録 3.1 にとりまとめた。

二重底振動による三次元付加質量を計算する場合、船底における流速分布は船の幅方向に変化するので熊井の方法ではこのような問題を解くことができない。したがって船底に直角方向に流体速度が放物線分布する場合にも適用できるように問題を拡張する。

実船の振動は主船体と二重底構造の連成として表れる。このような複合振動場におけるポテンシャル問題は、膨大なデータ作成の労を厭わなければ、有限要素法あるいは境界要素法を用いて数値結果を得ることは可能であり、振動解析の主流となっている感もあるがこのような数値計算主体の方法は；

- (i) 膨大なデータ量であり、入力ミス発生のおそれが多分にあることと、何がどのように効くのか、その感度が把めず、計算結果をそのまま信用せざるを得ないこと
- (ii) 初期計画段階での検討には計算に必要なデータが不足するのは避けられず、数値計算の実行が不可能か、もし実行したとしてもデータに確実性がなく、結果の信頼性に欠けることもあり、数理的なアプローチにより入力データを極く限られた数に限定し、パーソナルコンピュータを用いて容易に計算を可能とすることが望まれる。したがって本節ではこの理論の基本となる二次元付加質量の計算法についてまず記述する。

3.3.1 船体形状の Lewis 変換

今 Fig.3.3.1 に示すように ζ 平面における半径 $r=b_0$ の円を z 平面における船体断面に写像する。

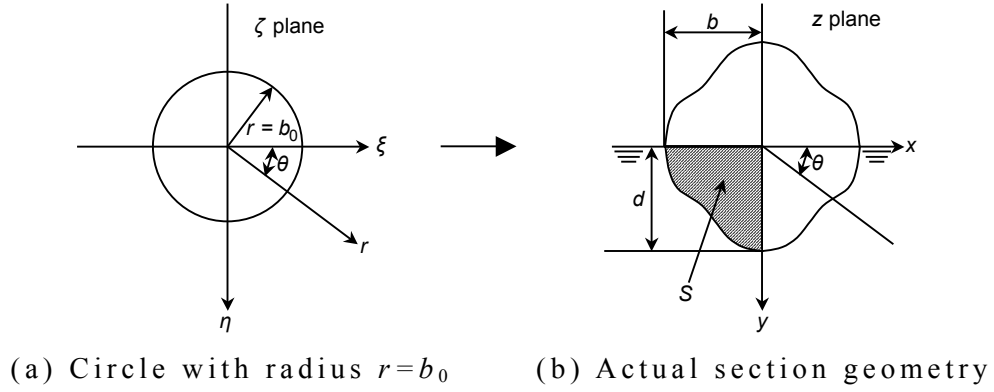


Fig.3.3.1 Mapping of circle to arbitrary section

この場合 z 平面における形状を特徴づける b, d, S をパラメータとして z と ζ の関係を b_0, a_1, a_3 をパラメータとした次式で与えるのが Lewis 変換である。

$$z = x + yi = b_0 \left(\zeta + \frac{a_1}{\zeta} + \frac{a_3}{\zeta^3} \right) \quad (3.3.1)$$

ここで ζ は次の関係を満足する。

$$\zeta = \frac{r}{b_0} e^{i\theta} \quad (3.3.2)$$

したがって (3.3.2) 式の関係を (3.3.1) 式に代入すると x, y は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} x &= b_0 \left\{ \left(\frac{r}{b_0} + a_1 \frac{b_0}{r} \right) \cos \theta + a_3 \left(\frac{b_0}{r} \right)^3 \cos 3\theta \right\} \\ y &= b_0 \left\{ \left(\frac{r}{b_0} - a_1 \frac{b_0}{r} \right) \sin \theta - a_3 \left(\frac{b_0}{r} \right)^3 \sin 3\theta \right\} \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

$r=b_0$ のときは z 平面の断面上の座標 (x_0, y_0) に対応し、それらは

$$x_0 = b_0 \{ (1 + a_1) \cos \theta + a_3 \cos 3\theta \} \quad (3.3.4)$$

$$y_0 = b_0 \{ (1 - a_1) \sin \theta - a_3 \sin 3\theta \} \quad (3.3.5)$$

と表現することができる。

今

$$\lambda = \frac{d}{b}, \quad \sigma = \frac{S}{bd}, \quad \xi = \frac{b_0}{b} \quad (3.3.6)$$

とおくと

a_1, a_3 および ξ は次のように与えられる（付録 3.2 参照）。

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{1 - \lambda}{2\xi} \\ a_3 &= \frac{1 + \lambda}{2\xi} - 1 \\ \xi &= \frac{3(1 + \lambda) - \sqrt{(1 + \lambda)^2 + 8\lambda \left(1 - \frac{4}{\pi} \sigma\right)}}{4} \end{aligned} \right\} \quad (3.3.7)$$

3.3.2 船底に鉛直方向の速度が幅方向に放物線分布する場合の 二次元付加質量

今 Fig.3.3.2 に示すような船底における流速の放物線分布を考える。

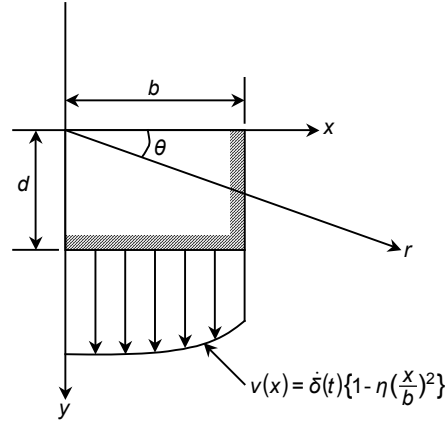


Fig.3.3.2 Parabolic distribution of bottom velocity

このとき速度 v を θ の関数として表現すると (3.3.4)式を代入することにより

$$v(\theta) = \dot{\delta}(t) \left[1 - \eta \xi^2 \left\{ (1 + a_1) \cos \theta + a_3 \cos 3\theta \right\}^2 \right] \quad (3.3.8)$$

として与えられる。ここで η は $0 \leq \eta \leq 1$ の値を取り $\eta=0$ の場合は速度が等分布となる。また ξ は (3.3.6) に示す b_0 と b の比である。

(1) 船体断面上における速度ポテンシャル ϕ

二次元座標 (r, θ) に対して速度ポテンシャル $\phi(r, \theta)$ は Laplace の方程式

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (3.3.9)$$

を満足しなければならない。

このとき、一般解は

$$\phi(r, \theta) = \sum_s c_s \left(\frac{b_0}{r} \right)^s \sin s \theta \quad (3.3.10)$$

として与えられる。

今 Fig.3.3.3 に示すように断面上 r 方向の速度を v_r とすれば

$$v_r = \left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=b_0} = v(\theta) \left. \frac{\partial y}{\partial r} \right|_{r=b_0} \quad (3.3.11)$$

の関係を満足する。

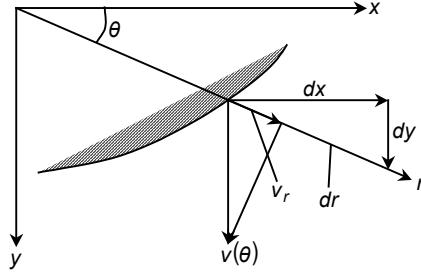


Fig.3.3.3 Relation between $v(\theta)$ and v_r

(3.3.11)式の関係に (3.3.3)式および (3.3.10)式を代入して整理すると次の関係式を満足しなければならない。

$$\begin{aligned} -\sum_s \frac{sc_s}{b_0} \sin s\theta &= \dot{\delta}(t) \left[1 - \eta \xi^2 \{ (1+a_1) \cos \theta + a_3 \cos 3\theta \}^2 \right] \{ (1+a_1) \sin \theta + 3a_3 \sin 3\theta \} \\ &= \dot{\delta}(t) \sum_s \alpha_s \sin s\theta \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

ここで α_s は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= (1+a_1) - \frac{\eta}{4} \xi^2 (1+a_1) \{ (1+a_1)^2 + 2a_3^2 + a_3(1+a_1) \} \\ \alpha_3 &= 3a_3 - \frac{\eta}{4} \xi^2 \{ (1+a_1)^3 + 6a_3(1+a_1)^2 + 3a_3^3 \} \\ \alpha_5 &= -\frac{\eta}{4} \xi^2 \{ 5a_3(1+a_1)(1+a_1+a_3) \} \\ \alpha_7 &= -\frac{\eta}{4} \xi^2 \{ 7a_3^2(1+a_1) \} \\ \alpha_9 &= -\frac{\eta}{4} \xi^2 \{ 3a_3^3 \} \end{aligned} \right\} \quad (3.3.13)$$

(3.3.13)式の導出過程を付録 3.3 に示す。

したがって c_s は

$$c_s = -\dot{\delta}(t) b_0 \frac{\alpha_s}{s} \tag{3.3.14}$$

として導かれる。

(2) 船体断面上における流れ関数 ψ

流れ関数 ψ は速度ポテンシャル ϕ との間に断面に沿直方向の速度 v_n を介して次の関係を有する。

$$v_n = \frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \psi}{\partial s} = v(\theta) \left(-\frac{\partial x}{\partial s} \right) \quad (3.3.15)$$

Fig.3.3.4 に示すように n は断面沿直方向， s は接線方向にとる。

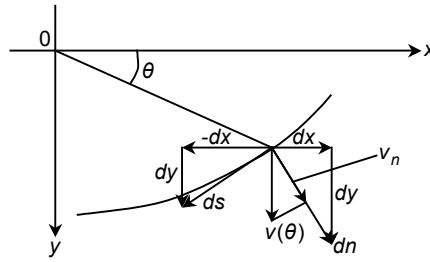


Fig.3.3.4 Relation between ds and dn

したがって断面上での流れ関数 $\psi|_{r=b_0}$ は (3.3.15) 式の関係より

$$\begin{aligned} \psi &= -\int v(\theta) dx \\ &= -\dot{\delta}(t) \int \left\{ 1 - \eta \left(\frac{x_0}{b} \right)^2 \right\} dx \\ &= -\dot{\delta}(t) \left(x_0 - \frac{1}{3} \eta \frac{x_0^3}{b^2} \right) + c \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

$y=0$ での ψ の反対称性より $c=0$ となるので $\psi|_{r=b_0}$ は (3.3.16) 式に (3.3.4) 式の関係を代入して

$$\begin{aligned} \psi|_{r=b_0} &= -\dot{\delta}(t) b_0 \left\{ (1+a_1) \cos \theta + a_3 \cos 3\theta \right\} \left[1 - \frac{\eta}{3} \xi^2 \left\{ (1+a_1) \cos \theta + a_3 \cos 3\theta \right\}^2 \right] \\ &= -\dot{\delta}(t) b_0 \sum_s \beta_s \cos s\theta \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

の関係を得ることができる。

ここで β_s は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned}
\beta_1 &= 1 + a_1 - \frac{\eta}{12} \xi^2 \left[3(1 + a_1) \left\{ (1 + a_1)^2 + 2a_3^2 + a_3(1 + a_1) \right\} \right] \\
\beta_3 &= a_3 - \frac{\eta}{12} \xi^2 \left\{ (1 + a_1)^3 + 6a_3(1 + a_1)^2 + 3a_3^3 \right\} \\
\beta_5 &= -\frac{\eta}{12} \xi^2 \left\{ 3a_3(1 + a_1)(1 + a_1 + a_3) \right\} \\
\beta_7 &= -\frac{\eta}{12} \xi^2 \left\{ 3a_3^2(1 + a_1) \right\} \\
\beta_9 &= -\frac{\eta}{12} \xi^2 \left\{ a_3^3 \right\}
\end{aligned} \right\} \quad (3.3.18)$$

(3.3.18)式の導出過程を付録 3.4 に示す。

(3) 二次元流体運動エネルギー T および付加質量 m_ℓ

二次元の流体運動エネルギー T は断面での速度ポテンシャル $\phi|_{r=b_0}$ および流れ関数 $\psi|_{r=b_0}$ を用いて次のように計算する。

$$T = -\frac{\rho}{2} \int_0^\pi \phi \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \Big|_{r=b_0} d\theta = \frac{1}{2} \dot{\delta}(t)^2 \left[\frac{\rho}{2} \pi b^2 \xi^2 \sum_s \alpha_s \beta_s \right] \quad (3.3.19)$$

したがって二次元付加質量 m_ℓ は

$$m_\ell = \frac{\rho}{2} \pi b^2 \xi^2 \sum_s \alpha_s \beta_s \quad (3.3.20)$$

今 $\eta=0$ すなわち船底に鉛直な速度成分が幅方向に一定の場合には二次元付加質量 $m_\ell|_{\eta=0}$ は

$$m_\ell|_{\eta=0} = \frac{\rho}{2} \pi b^2 \xi^2 \left\{ (1+a_1)^2 + 3a_3^2 \right\} \quad (3.3.21)$$

と与えられ、Lewis の与えた二次元付加質量[16]と一致する。

3.4 三次元流体場における運動エネルギーと付加質量

三次元流体運動の場合には Fig.3.4.1 に示す z 方向の流体拡散が二重の意味で生じる。

一つは振動モードにより拡散するものであり，他は船の長さが有限であることにより生じるものである。

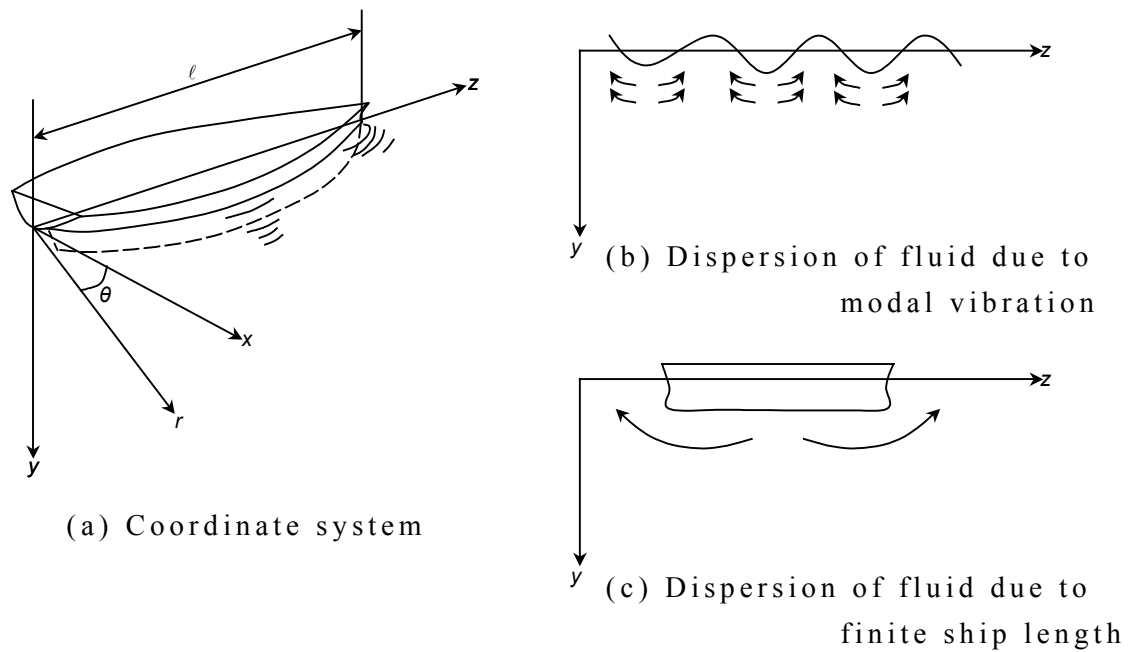


Fig.3.4.1 Three dimensional dispersion of fluid around ship

この問題については船底での y 方向速度が均一の場合については既に熊井 [18] によりその計算法が導かれているが，二重底振動のようにその分布が不均一な場合へと理論を拡張する。

3.4.1 三次元空間における速度ポテンシャル場 ϕ

今 Fig.3.4.2 に示す船底に放物線分布する速度場について考える。 $\eta=0$ の場合は均等分布の速度場を与える。

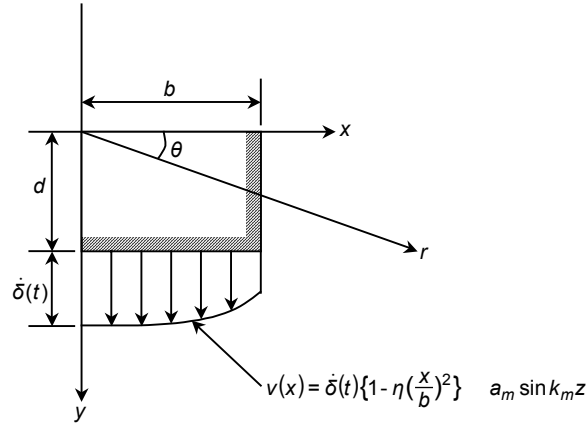


Fig.3.4.2 Velocity distribution on bottom

円筒座標系における Laplace の方程式は

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (3.4.1)$$

で与えられる。このとき (3.4.1) 式の要素解 ϕ_{ms} が次のように変数分離形で与えられると仮定する。

$$\phi_{ms}(r, \theta, z) = R_{ms}(r) \sin s\theta \sin k_m z \quad (3.4.2)$$

ここで $k_m = \frac{m\pi}{\ell}$

このとき (3.4.2) 式を (3.4.1) 式に代入すると $R_{ms}(r)$ に関する線形微分方程式は次のとおりである。

$$\frac{d^2 R_{ms}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_{ms}}{dr} - \left(k_m^2 + \frac{s^2}{r^2} \right) R_{ms} = 0 \quad (3.4.3)$$

(3.4.3) 式の解は $r \rightarrow \infty$ で $R_{ms}(r) \rightarrow 0$ とならなければならないので

$$R_{ms} \sim K_s(k_m r) \quad (3.4.4)$$

の解を得る。ここで $K_s(k_m r)$ は s 次の第二種変形 Bessel 関数である。

したがって速度ポテンシャルの解は次のように与えられる。

$$\phi(r, \theta, z, t) = \dot{\delta}(t) \sum_s \sum_m a_m A_{ms} K_s(k_m r) \sin s \theta \sin k_m z \quad (3.4.5)$$

ここで $\dot{\delta}(t)$: 速度 $[\text{m} \cdot \text{s}^{-1}]$ の次元

a_m : 振動モードを Fourier 正弦展開したときの係数 (無次元)

A_{ms} : 境界条件より求められる係数で長さ $[\text{m}]$ の次元を有する

Fig.3.4.3 に示す r 方向の速度 v_r は次のような関係式を有する。

$$v_r = v(\theta) \frac{\partial y}{\partial r} \Big|_{r=b_0} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=b_0} \quad (3.4.6)$$

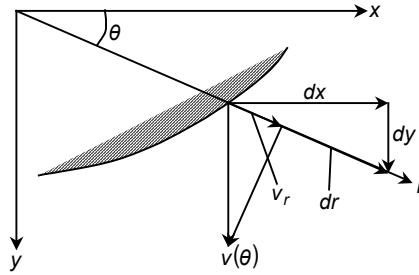


Fig.3.4.3 Relation between $v(\theta)$ and v_r

まず $\frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=b_0}$ については (3.4.5) 式を r に関して微分することにより

次の関係を有する。

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=b_0} = \dot{\delta}(t) \sum_s \sum_m a_m A_{ms} \frac{dK_s(k_m r)}{dr} \Big|_{r=b_0} \sin s \theta \sin k_m z \quad (3.4.7)$$

今次の漸化式が成立する (岩波数学公式Ⅲ, p174)。

$$z \frac{dK_s(z)}{dz} = -sK_s(z) - zK_{s-1}(z) \quad (3.4.8)$$

(3.4.8) 式の z に $k_m b_0$ を代入すると

$$b_0 \frac{dK_s(k_m r)}{dr} \Big|_{r=b_0} = -sK_s(k_m b_0) - k_m b_0 K_{s-1}(k_m b_0) \quad (3.4.9)$$

の関係があるのでこれを (3.4.7)式に代入して整理すると

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=b_0} = -\dot{\delta}(t) \sum_s \sum_m a_m A_{ms} \frac{sK_s(k_m b_0) + k_m b_0 K_{s-1}(k_m b_0)}{b_0} \sin s \theta \sin k_m z \quad (3.4.10)$$

の関係が導かれる。

一方, Fig.3.4.3 を参照して v_r を θ の関数として求めると次式が求められる。

$$\begin{aligned} v_r &= \dot{\delta}(t) \left[1 - \eta \xi^2 \{ (1+a_1) \cos \theta + a_3 \cos 3\theta \}^2 \right] \{ (1+a_1) \sin \theta + 3a_3 \sin 3\theta \} \sum_m a_m \sin k_m z \\ &= \dot{\delta}(t) \sum_s \alpha_s \sin s \theta \sum_m a_m \sin k_m z \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

α_s は (3.3.13)式で既に与えている。

(3.4.10)式と (3.4.11)式を等置することにより A_{ms} は次式で与えられる。

$$A_{ms} = -b_0 \frac{\alpha_s}{sK_s(k_m b_0) + k_m b_0 K_{s-1}(k_m b_0)} \quad (3.4.12)$$

ただし $s=1, 3, 5, 7, 9$

の数値をとる。

(3.4.12)式を (3.4.5)式に代入することにより $\phi(r, \theta, z, t)$ は

$$\phi(r, \theta, z, t) = -\dot{\delta}(t) b_0 \sum_{s=1,3,\dots}^9 \sum_m a_m \frac{\alpha_s \frac{K_s(k_m r)}{K_s(k_m b_0)}}{s + k_m b_0 \frac{K_{s-1}(k_m b_0)}{K_s(k_m b_0)}} \sin s \theta \sin k_m z \quad (3.4.13)$$

として表される。

3.4.2 三次元空間船体断面上における流れ関数 ψ

3.3.2(2) で記述した方法により断面上での流れ関数 $\psi(r, \theta, z, t)|_{r=b_0}$ は次のように与えられる。

$$\psi|_{r=b_0} = -\dot{\delta}(t)b_0 \sum_s \beta_s \cos s\theta \sum_m a_m \sin k_m z \quad (3.4.14)$$

β_s は (3.3.18) 式に与えるものと同一である。

3.4.3 三次元流体運動エネルギー T および付加質量 M_ℓ

船体表面における速度ポテンシャル $\phi(r, \theta, z, t)|_{r=b_0}$ は (3.4.13) 式を用いて次のように表される。

$$\phi(r, \theta, z, t)|_{r=b_0} = -\dot{\delta}(t)b_0 \sum_{s=1,3,\dots}^9 \sum_m a_m \frac{\alpha_s}{s + k_m b_0 \frac{K_{s-1}(k_m b_0)}{K_s(k_m b_0)}} \sin s\theta \sin k_m z \quad (3.4.15)$$

また流れ関数を θ で微分した $\frac{\partial \psi}{\partial \theta}|_{r=b_0}$ は (3.4.14) 式より

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta}|_{r=b_0} = \dot{\delta}(t)b_0 \sum_{s=1,3,\dots}^9 s\beta_s \sin s\theta \sum_m a_m \sin k_m z \quad (3.4.16)$$

と与えられるので三次元流体運動エネルギー T は

$$\begin{aligned} T &= -\frac{\rho}{2} \int_0^\pi \int_0^\ell \phi \frac{\partial \psi}{\partial \theta}|_{r=b_0} d\theta \cdot dz \\ &= \frac{1}{2} \dot{\delta}(t)^2 \frac{\rho}{4} \pi b^2 \ell \left\{ \xi^2 \sum_{s=1,3,\dots}^9 \sum_m a_m^2 \frac{s\alpha_s \beta_s}{s + k_m b_0 \frac{K_{s-1}(k_m b_0)}{K_s(k_m b_0)}} \right\} \end{aligned} \quad (3.4.17)$$

となる。このことより付加質量 M_ℓ は

$$M_\ell = \frac{\rho}{4} \pi b^2 \ell \left\{ \xi^2 \sum_{s=1,3,\dots}^9 \sum_m a_m^2 \frac{s\alpha_s \beta_s}{s + k_m b_0 \frac{K_{s-1}(k_m b_0)}{K_s(k_m b_0)}} \right\} \quad (3.4.18)$$

として与えられることになる。

3.4.4 振動モード展開係数 a_m

3.4 節においては主船体にしろ二重底にしろその振動モードの Fourier sine 展開係数を a_m として表現してきた。ここではこれらの振動モードを表現する a_m についてまとめることとする。なお展開の論拠については付録 3.5 に記述してある。

(1) 主船体振動の場合

Fig.3.4.4 に示すように船の全長にわたって $\cos \frac{n\pi z}{\ell}$ (n : 節数) の振動モードが生じるとしたとき船の有限長効果を表現するために端部で振動モードが逆転するモードの無限列を考えて Fourier sine 展開を行う。

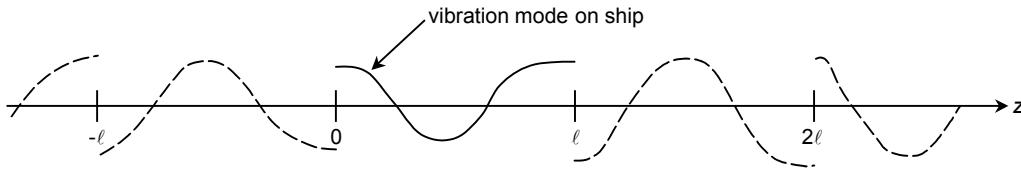


Fig.3.4.4 Fourier sine expansion of hull vibration mode

今

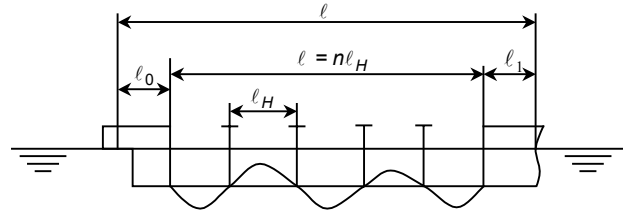
$$\cos \frac{n\pi z}{\ell} = \sum_m a_m \sin \frac{m\pi z}{\ell} \quad (3.4.19)$$

とおくと a_m は次のように与えられる。

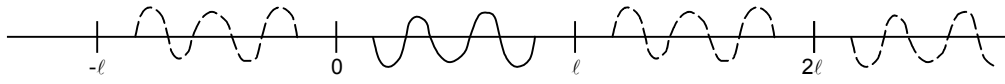
$$\left. \begin{aligned} a_m &= \frac{4}{\pi} \frac{m}{m^2 - n^2} \\ \text{ここで } n: \text{偶数のとき } m &= 1, 3, 5, \dots \\ n: \text{奇数のとき } m &= 2, 4, 6, \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.4.20)$$

(2) 二重底が sine モードで振動する場合

主船体の中間部 ℓ' の間が Fig.3.4.5 に示すように各横隔壁を支持点とした sine 分布をすると仮定する。



(a) Vibration mode of double bottom



(b) Fourier sine expansion

Fig.3.4.5 Fourier sine expansion of mode in double bottom

この場合関係式は次のように与えられる。

$$\left. \begin{array}{ll} 0 & 0 < z < \ell_0 \\ \sin \frac{\pi(z - \ell_0)}{\ell_H} & \ell_0 < z < \ell - \ell_1 \\ 0 & \ell - \ell_1 < z < \ell \end{array} \right\} = \sum_m a_m \sin \frac{m\pi z}{\ell} \quad (3.4.21)$$

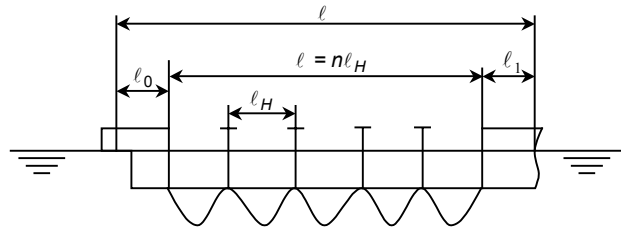
(3.4.21) の解は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 a_m &= f_m + g_m \cos \pi \frac{\ell_0}{\ell_H} + h_m \sin \pi \frac{\ell_0}{\ell_H} \\
 f_m &= 0 \\
 g_m &= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\sin \pi \left(m - \frac{\ell}{\ell_H} \right) \frac{\ell - \ell_1}{\ell} - \sin \pi \left(m - \frac{\ell}{\ell_H} \right) \frac{\ell_0}{\ell}}{m - \frac{\ell}{\ell_H}} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\sin \pi \left(m + \frac{\ell}{\ell_H} \right) \frac{\ell - \ell_1}{\ell} - \sin \pi \left(m + \frac{\ell}{\ell_H} \right) \frac{\ell_0}{\ell}}{m + \frac{\ell}{\ell_H}} \right\} \\
 h_m &= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\cos \pi \left(m + \frac{\ell}{\ell_H} \right) \frac{\ell - \ell_1}{\ell} - \cos \pi \left(m + \frac{\ell}{\ell_H} \right) \frac{\ell_0}{\ell}}{m + \frac{\ell}{\ell_H}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\cos \pi \left(m - \frac{\ell}{\ell_H} \right) \frac{\ell - \ell_1}{\ell} - \cos \pi \left(m - \frac{\ell}{\ell_H} \right) \frac{\ell_0}{\ell}}{m - \frac{\ell}{\ell_H}} \right\}
 \end{aligned} \right\} \quad (3.4.22)$$

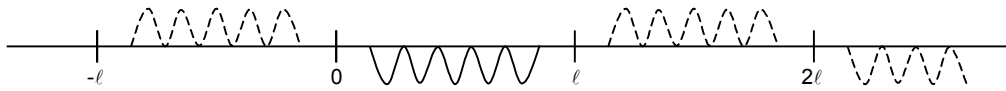
ただし $m=1, 2, 3, \dots$ ととる。

(3) 二重底が sine の 2 乗モードで振動する場合

主船体の中央部 ℓ' の間が Fig.3.4.6 に示すように各横隔壁で回転固定された sine 2 乗分布をすると仮定する。



(a) Vibration mode of double bottom



(b) Fourier sine expansion

Fig.3.4.6 Fourier sine expansion of mode in double bottom

この場合関係式は以下を満足する。

$$\left. \begin{array}{ll} 0 & 0 < z < \ell_0 \\ \sin^2 \frac{\pi(z - \ell_0)}{\ell_H} & \ell_0 < z < \ell - \ell_1 \\ 0 & \ell - \ell_1 < z < \ell \end{array} \right\} = \sum_m a_m \sin \frac{m\pi z}{\ell} \quad (3.4.23)$$

(3.4.23) は次のような展開式となる。

$$\left. \begin{aligned}
a_m &= f_m + g_m \cos 2\pi \frac{\ell_0}{\ell_H} + h_m \sin 2\pi \frac{\ell_0}{\ell_H} \\
f_m &= \frac{1}{m\pi} \left(\cos m\pi \frac{\ell_0}{\ell} - \cos m\pi \frac{\ell - \ell_0}{\ell} \right) \\
g_m &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\cos \pi \left(m + \frac{2\ell}{\ell_H} \right) \frac{\ell - \ell_1}{\ell} - \cos \pi \left(m + \frac{2\ell}{\ell_H} \right) \frac{\ell_0}{\ell}}{m + \frac{2\ell}{\ell_H}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\cos \pi \left(m - \frac{2\ell}{\ell_H} \right) \frac{\ell - \ell_1}{\ell} - \cos \pi \left(m - \frac{2\ell}{\ell_H} \right) \frac{\ell_0}{\ell}}{m - \frac{2\ell}{\ell_H}} \right\} \\
h_m &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\sin \pi \left(m - \frac{2\ell}{\ell_H} \right) \frac{\ell_0}{\ell} - \sin \pi \left(m - \frac{2\ell}{\ell_H} \right) \frac{\ell - \ell_1}{\ell}}{m - \frac{2\ell}{\ell_H}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\sin \pi \left(m + \frac{2\ell}{\ell_H} \right) \frac{\ell_0}{\ell} - \sin \pi \left(m + \frac{2\ell}{\ell_H} \right) \frac{\ell - \ell_1}{\ell}}{m + \frac{2\ell}{\ell_H}} \right\}
\end{aligned} \right\} \quad (3.4.24)$$

ただし $m=1, 2, 3, \dots$ ととる。

3.5 複合振動場における流体運動エネルギーと付加質量

主船体単独振動による速度ポテンシャルを ϕ_1 ，流れ関数を ψ_1 とし，二重底構造単独振動によるものを各々 ϕ_2, ψ_2 とおいたとき，流体運動エネルギー T は次式で与えられる。

$$T = -\frac{1}{2}\rho \int_0^\pi \int_0^\ell (\phi_1 + \phi_2) \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} \right) \Big|_{r=b_0} d\theta dz = T_{11} + T_{22} + T_{12} + T_{21} \quad (3.5.1)$$

このうち

$$T_{11} = -\frac{1}{2}\rho \int_0^\pi \int_0^\ell \phi_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \Big|_{r=b_0} d\theta dz \quad (3.5.2)$$

は主船体単独振動による流体運動エネルギーを与える。

一方，

$$T_{22} = -\frac{1}{2}\rho \int_0^\pi \int_0^\ell \phi_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} \Big|_{r=b_0} d\theta dz \quad (3.5.3)$$

は二重底構造の単独振動によって生じるものである。

T_{12} および T_{21} に関しては主船体と二重底の連成によって生じるものであり各々次のように与えられる。

$$T_{12} = -\frac{1}{2}\rho \int_0^\pi \int_0^\ell \phi_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} \Big|_{r=b_0} d\theta dz \quad (3.5.4)$$

$$T_{21} = -\frac{1}{2}\rho \int_0^\pi \int_0^\ell \phi_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \Big|_{r=b_0} d\theta dz \quad (3.5.5)$$

(3.5.4)式および (3.5.5)式で与える流体運動エネルギーが主船体と二重底構造の振動の連成項となる。

3.5.1 三次元付加質量修正係数 J_{ij}

主船体は船の前後に向かって形が痩せるため，その形状変化が付加質量や流体運動エネルギーにおよぼす影響が大きい。

一方二重底構造に関しては，主船体の場合と比較して，その前後における痩せ方が小さくほぼ均一形状と考えてよい。

船の振動による流体運動の三次元効果については 3.4 節に記述したが，断面形状を均一と仮定し，複合振動場における流体運動エネルギー T_{ij} を導くと

$$T_{ij} = \frac{1}{2} \dot{\delta}(t)^2 \left[\frac{\rho}{4} \pi b^2 \ell \left\{ \xi^2 \sum_m \sum_s a_m a'_m \frac{s \alpha_s \beta'_s}{s + k_m b_0 \frac{K_{s-1}(k_m b_0)}{K_s(k_m b_0)}} \right\} \right] \quad (3.5.6)$$

のように表現することができる。ここで a'_m, β'_s は複合振動体の一方の係数を与えるものである。

このとき付加質量 $M_{\ell ij}$ は次のとおりである。

$$M_{\ell ij} = \frac{\rho}{4} \pi b^2 \ell \left\{ \xi^2 \sum_m \sum_s a_m a'_m \frac{s \alpha_s \beta'_s}{s + k_m b_0 \frac{K_{s-1}(k_m b_0)}{K_s(k_m b_0)}} \right\} \quad (3.5.7)$$

一方二次元問題としての運動エネルギー t_{ij} は 3.3 節より (3.3.20) 式より

$$t_{ij} = \frac{1}{2} \dot{\delta}(t)^2 \left[\frac{\rho}{2} \pi b^2 \left\{ \xi^2 \sum_s \alpha_s \beta'_s \right\} \right] \quad (3.5.8)$$

として与えられる。

(3.5.8) 式の関係から二次元付加質量 m_{lij} は次のとおりである。

$$m_{lij} = \frac{\rho}{2} \pi b^2 \left\{ \xi^2 \sum_s \alpha_s \beta'_s \right\} \quad (3.5.9)$$

今主船体および二重底の振動モードが各々 $p(z), p(z)'$ で与えられるとすると三次元効果を考慮しない等価な流体運動エネルギー \tilde{T}_{ij} は次式で与えられる。

$$\tilde{T}_{ij} = m_{\ell ij} \int_0^\ell p(z) p(z)' dz \quad (3.5.10)$$

三次元付加質量修正係数 J_{ij} は (3.5.7)式と (3.5.10)式の比, すなわち

$$J_{ij} = \frac{\frac{\ell}{2} \sum_m \sum_s a_m a'_m \frac{s \alpha_s \beta'_s}{s + k_m b_0 \frac{K_{s-1}(k_m b_0)}{K_s(k_m b_0)}}}{\sum_s \alpha_s \beta'_s \int_0^\ell p(z) p(z)' dz} \quad (3.5.11)$$

により求めることができる。

3.5.2 主船体振動における流体運動エネルギー，付加質量および流体減衰エネルギー

主船体振動の場合 Fig.3.3.2 に示す船底鉛直方向の流速は断面剛として上下運動するため図中の η は $\eta=0$ となる。

このとき (3.3.13)式で与える α_s は次のようになる。

$$\alpha_1=1+a \quad \alpha_3=3a_3 \quad \alpha_5=\alpha_7=\alpha_9=0$$

また (3.3.18)式で与える β'_s は

$$\beta'_1=1+a_1 \quad \beta'_3=a_3 \quad \beta'_5=\beta'_7=\beta'_9=0$$

となる。

また a_m, a'_m は

$$a_m = a'_m = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{m}{m^2 - n^2}$$

であり $p(z), p(z)'$ は

$$p(z) = p(z)' = \cos \frac{n\pi z}{\ell}$$

以上を (3.5.11)式に代入することにより J_{11} は

$$J_{11} = \frac{\frac{16}{\pi^2} \sum_m \left(\frac{m}{m^2 - n^2} \right)^2 \left\{ \frac{(1+a_1)^2}{1+k_m b_0 \frac{K_0(k_m b_0)}{K_1(k_m b_0)}} + \frac{9a_3^2}{3+k_m b_0 \frac{K_2(k_m b_0)}{K_3(k_m b_0)}} \right\}}{(1+a)^2 + 3a_3^2} \quad (3.5.12)$$

となる。ただし m 値は

$$n : \text{偶数のとき} \quad m=1, 3, 5, \dots$$

$$n : \text{奇数のとき} \quad m=2, 4, 6, \dots$$

ととらなければならない。

付加質量 $M_{\ell 11}$ は (3.5.9)式の関係を用いることにより

$$\begin{aligned} M_{\ell 11} &= \int_0^\ell m_{\ell 11}(z) J_{11} p(z) p(z)' dz \\ &= J_{11} \left[\frac{\rho}{2} \pi b^2 \int_0^\ell \xi^2 \left\{ (1+a_1(z))^2 + 3a_3(z)^2 \right\} \cos^2 \frac{n\pi z}{\ell} dz \right] \end{aligned} \quad (3.5.13)$$

により計算できる。

流体運動エネルギー T_{11} は

$$T_{11} = \frac{1}{2} \dot{\delta}(t)^2 M_{\ell 11} \quad (3.5.14)$$

として与えられ，時間あたりの減衰エネルギー D_{11} は

$$D_{11} = \lambda T_{11} \quad (3.5.15)$$

によって計算できる。

3.5.3 二重底構造単独振動系

二重底構造が振動する場合 Fig.3.3.2 に示す船底沿直方向の振動流速は $\eta=1$ の場合として与えられる。

この場合の速度ポテンシャル ϕ の係数である α_s は (3.3.13)式で与えられ，流れ関数 ψ の係数 β_s は (3.3.18)式に示すとおりである。一方， a_m, a'_m については (3.4.22)式および (3.4.24)式に示すように

sine モード振動の場合

$$a_m = f_m + g_m \cos \pi \frac{\ell_0}{\ell_H} + h_m \sin \pi \frac{\ell_0}{\ell_H}$$

sine の 2 乗モードのとき

$$a_m = f_m + g_m \cos 2\pi \frac{\ell_0}{\ell_H} + h_m \sin 2\pi \frac{2\ell_0}{\ell_H}$$

として与えられる。

ただし (3.4.22)式および (3.4.24)式に示すように f_m, g_m, h_m は sine モードと sine の 2 乗モードでは異なった関数式となる。

この場合三次元流体運動エネルギー T_{22} は

$$T_{22} = \frac{1}{2} \dot{\delta}(t)^2 \left[\frac{\rho}{4} \pi b^2 \ell \left\{ \xi^2 \sum_{s=1,3,\dots}^9 \sum_m a_m^2 \frac{s \alpha_s \beta_s}{s + k_m b_0 \frac{K_{s-1}(k_m b_0)}{K_s(k_m b_0)}} \right\} \right] \quad (3.5.16)$$

で与えられる。

時間あたりの減衰エネルギー D_{22} は T_{22} と次の関係を有する。

$$D_{22} = \lambda T_{22} \quad (3.5.17)$$

付加質量 $M_{\ell 22}$ は

$$M_{\ell 22} = \frac{\rho}{4} \pi b^2 \ell \left\{ \xi^2 \sum_{s=1,3,\dots}^9 \sum_m a_m^2 \frac{s \alpha_s \beta_s}{s + k_m b_0 \frac{K_{s-1}(k_m b_0)}{K_s(k_m b_0)}} \right\} \quad (3.5.18)$$

により計算できる。

3.5.4 主船体と二重底の連成

主船体振動と二重底構造振動の連成を生じるのは流体運動エネルギーと減衰エネルギーの連成効果によるものであり，剛性系に連成成分は存在しない。

主船体系については $\alpha_1, \beta_1, \alpha_3, \beta_3$ 以外は 0 となるためエネルギー計算で表れる $\alpha_2 \beta'_s$ の積和は $s=1, 3$ の場合の 2 項のみとなる。

(1) T_{12} の場合

主船体系の α_1, α_3 は以下のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= 1 + a_1 \\ \alpha_3 &= 3a_3 \end{aligned} \right\} \quad (3.5.19)$$

a_m は次式で与えられる。

$$a_m = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{m}{m^2 - n^2} \quad (3.5.20)$$

ただし n : 偶数のとき $m = 1, 3, 5, \dots, \infty$
 n : 奇数のとき $m = 2, 4, 6, \dots, \infty$

一方二重底系についてまとめると以下のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} \beta'_1 &= 1 + a_1 - \frac{1}{12} \xi^2 \left[3(1 + a_1) \left\{ (1 + a_1)^2 + a_3(1 + a_1) + 2a_3^2 \right\} \right] \\ \beta'_3 &= a_3 - \frac{1}{12} \xi^2 \left\{ (1 + a_1)^3 + 6a_3(1 + a_1)^2 + 3a_3^3 \right\} \\ a'_m &= \begin{cases} f_m + g_m \cos \pi \frac{\ell_0}{\ell_H} + h_m \sin \pi \frac{\ell_0}{\ell_H} & (\text{sine モード}) \\ f_m + g_m \cos 2\pi \frac{\ell_0}{\ell_H} + h_m \sin 2\pi \frac{\ell_0}{\ell_H} & (\text{sine 2乗モード}) \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (3.5.21)$$

ここで f_m, g_m, h_m は振動モードにより異なった関数系をとる。

連成流体運動エネルギー T_{12} は (3.5.6) 式に (3.5.20) 式および (3.5.21) 式を代入することにより次のように与えられる。

$$T_{12} = \frac{1}{2} \dot{\delta}(t)^2 \left\| \left\| \frac{\rho}{4} \pi b^2 \ell \left[\xi^2 a'_m \frac{4}{\pi} \frac{m}{m^2 - n^2} \left\{ \frac{\alpha_1 \beta'_1}{1 + k_m b_0 \frac{K_0(k_m b_0)}{K_1(k_m b_0)}} + \frac{3\alpha_3 \beta'_3}{3 + k_m b_0 \frac{K_2(k_m b_0)}{K_3(k_m b_0)}} \right\} \right] \right\| \right\| \quad (3.5.22)$$

時間あたりの減衰エネルギー D_{12} は

$$D_{12} = \lambda T_{12} \quad (3.5.23)$$

で与えられ，連成三次元付加質量 $M_{\ell 12}$ は

$$M_{\ell 12} = \frac{\pi}{4} \rho b^2 \ell \left[\xi^2 a'_m \frac{4}{\pi} \frac{m}{m^2 - n^2} \left\{ \frac{\alpha_1 \beta'_1}{1 + k_m b_0 \frac{K_0(k_m b_0)}{K_1(k_m b_0)}} + \frac{3\alpha_3 \beta'_3}{3 + k_m b_0 \frac{K_2(k_m b_0)}{K_3(k_m b_0)}} \right\} \right] \quad (3.5.24)$$

ここで $\alpha_1 \beta'_1, 3\alpha_3 \beta'_3$ は

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 \beta'_1 &= (1+a) \left[1 + a - \frac{\xi^2}{4} (1+a_1) \left\{ (1+a)^2 + a_3 (1+a_1) + 2a_3^2 \right\} \right] \\ 3\alpha_3 \beta'_3 &= 9a_3 \left[a_3 - \frac{\xi^2}{12} \left\{ (1+a_1)^3 + 6a_3 (1+a_1)^2 + 3a_3^3 \right\} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.5.25)$$

で与えられる。

(2) T_{21} の場合

二重底系の α_1, α_3 は (3.3.13)式より次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= 1 + a_1 - \frac{\xi^2}{4}(1 + a_1) \left\{ (1 + a_1)^2 + a_3(1 + a_1) + 2a_3^2 \right\} \\ \alpha_3 &= 3a_3 - \frac{\xi^2}{4} \left\{ (1 + a_1)^3 + 6a_3(1 + a_1)^2 + 3a_3^3 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3.5.26)$$

一方，主船体系の β'_1, β'_3 は (3.3.18)式より

$$\left. \begin{aligned} \beta'_1 &= 1 + a_1 \\ \beta'_3 &= a_3 \end{aligned} \right\} \quad (3.5.27)$$

と与えられ， a_m, a'_m については

$$\left. \begin{aligned} a_m &= \begin{cases} f_m + g_m \cos \pi \frac{\ell_0}{\ell_H} + h_m \sin \pi \frac{\ell_0}{\ell_H} & (\text{sine モードのとき}) \\ f_m + g_m \cos 2\pi \frac{\ell_0}{\ell_H} + h_m \sin 2\pi \frac{\ell_0}{\ell_H} & (\text{sine 2乗モードのとき}) \end{cases} \\ a'_m &= \frac{4}{\pi} \cdot \frac{m}{m^2 - n^2} \\ \text{ただし } n : \text{偶数のとき } m &= 1, 3, 5, \dots, \infty \\ n : \text{奇数のとき } m &= 2, 4, 6, \dots, \infty \end{aligned} \right\} \quad (3.5.28)$$

となる。

$\alpha_1 \beta'_1, 3\alpha_3 \beta'_3$ は

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 \beta'_1 &= (1 + a_1) \left[1 + a_1 - \frac{\xi^2}{4}(1 + a_1) \left\{ (1 + a_1)^2 + a_3(1 + a_1) + 2a_3^2 \right\} \right] \\ 3\alpha_3 \beta'_3 &= 9a_3 \left[a_3 - \frac{\xi^2}{12} \left\{ (1 + a_1)^3 + 6a_3(1 + a_1)^2 + 3a_3^3 \right\} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.5.29)$$

となる。 $a_m a'_m$ は T_{12} と同一となる。 $\alpha_1 \beta'_1, 3\alpha_3 \beta'_3$ については (3.5.25)式と (3.5.29)式の比較より同一である。

T_{21} および $M_{\ell 21}$ については (3.5.29)式の結果を (3.5.22)式, (3.5.24)式に代入することにより計算できる。

以上より

$$T_{12} = T_{21}, \quad D_{12} = D_{21}, \quad M_{\ell 12} = M_{\ell 21} \quad (3.5.30)$$

となり同一の値を与えることになる。

3.6 実験および数値計算による検証

前節まで記述した付加質量については空中振動と接水振動時の振動数の違いから間接的に付加質量を推定するしか方法がなく、直接的に付加質量を計測することは困難である。本節では模型実験による比較と数値的検証により 3 章における付加質量および減衰エネルギー推定の有効性の確認を行う。

3.6.1 流体減衰エネルギー係数 λ の実験的推定

時間あたりの減衰エネルギー D は 3.2.2 で次式で与えられることを示した。

$$D = \frac{1}{2} \lambda M_\ell \dot{\delta}^2 \quad [\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}] \quad (3.6.1)$$

ここで λ : $1/\text{時間} [\text{s}^{-1}]$ の次元を有する実験係数

M_ℓ : 付加質量 $[\text{kg}]$

$\dot{\delta}$: 振動速度 $[\text{m} \cdot \text{s}^{-1}]$

実験の目的とするところを λ 値が有するオーダーを知ることとしたため、付加質量については以下の式によって与えられる三次元付加質量を用いる。

$$M_\ell = \rho \frac{\pi}{2} b^2 \ell C_V J_V \quad (3.6.2)$$

ここで ρ : 流体の密度 $[\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}]$

b : 試験片の半幅 $[\text{m}]$

ℓ : スパン長 $[\text{m}]$

C_V : 付加質量二次元修正係数 [無次元]

J_V : 付加質量三次元修正係数 [無次元]

今ビームのたわみを $y(x, t)$ とおき，第 2 章で記述した構造振動方程式と流体振動方程式を合体させると次式が与えられる。

$$(M + M_\ell)\ddot{y} + \lambda M_\ell \dot{y} + (M + M_\ell)\omega_n^2(1 + i n \gamma)y = 0 \quad (3.6.3)$$

ここで M ：構造質量 [kg]

M_ℓ ：流体付加質量 [kg]

ω_n ：系の固有円振動数 [s^{-1}]

n ：振動節数

γ ：構造減衰係数 [無次元]

今

$$y = y_0 e^{-(\alpha + \beta i)t} \quad (3.6.4)$$

とおき，かつ自然減衰であるから (3.6.3) 式の右辺外力項を 0 とおいて高次の微小量を見捨てることと α, β は次のように近似できる。なお α, β とも [s^{-1}] の次元を有する。

$$\left. \begin{aligned} \alpha &\doteq \frac{1}{2}(\lambda\eta + n\gamma\omega_n) \\ \beta &\doteq \omega_n \end{aligned} \right\} \quad (3.6.5)$$

ここで η は次の無次元量を意味する。

$$\eta = \frac{M_\ell}{M + M_\ell} \quad (3.6.6)$$

このとき自然減衰振動から求められる対数減衰率 δ は次のように与えられる。

$$\delta = \ell n \frac{e^{(-\alpha + \omega_n i)t}}{e^{(-\alpha + \omega_n i)\left(t + \frac{2\pi}{\omega_n}\right)}} = \pi\eta \frac{\lambda}{\omega_n} + n\pi\gamma \quad (3.6.7)$$

第 2 章で明らかとなった無次元構造減衰係数 γ を (3.6.7) 式に代入し，実測の接水振動時対数減衰率 δ より λ は同定できることになる。

Fig.3.6.1 に実験に用いた試験片の形状寸法を，Fig.3.6.2 には接水振動時の試験片の水面からのはねあがり防止を目的で取り付けしたウレタンの貼付状態を、それぞれ 2 章から再録して示す。Photo 3.6.1 に水槽での接水振動実験装置設置状況を示す。

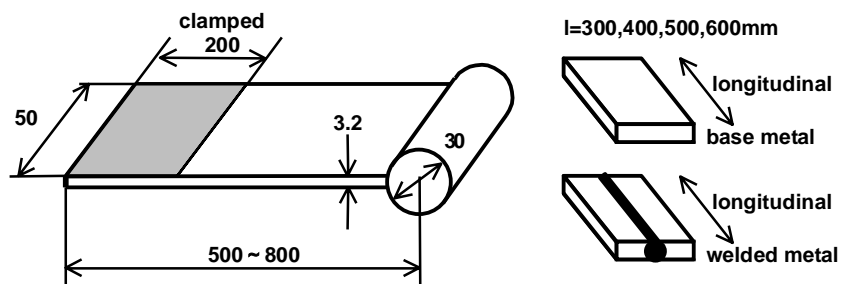


Fig.3.6.1 Test specimen for measurement in air

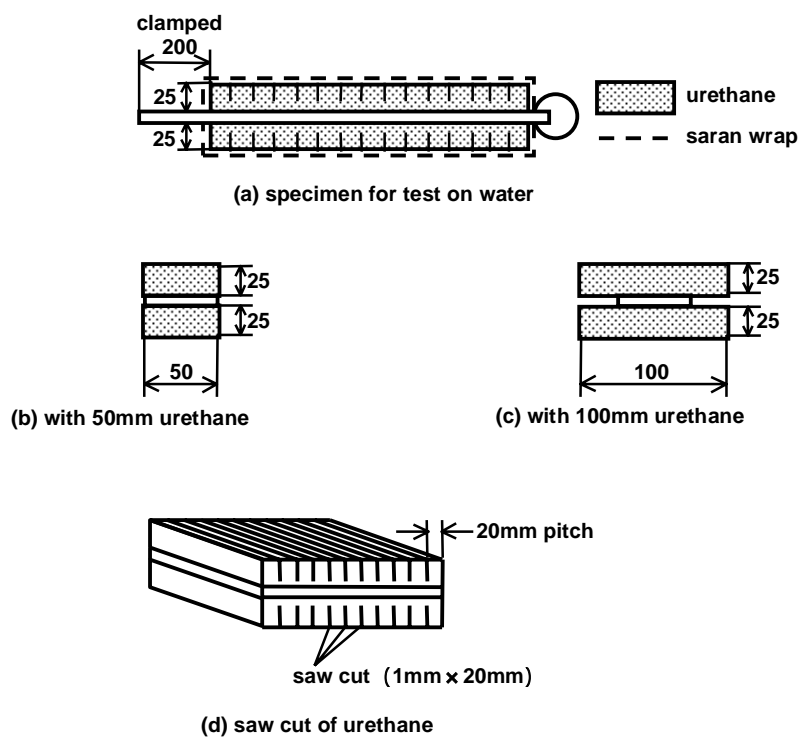


Fig.3.6.2 Test specimen for measurement on water

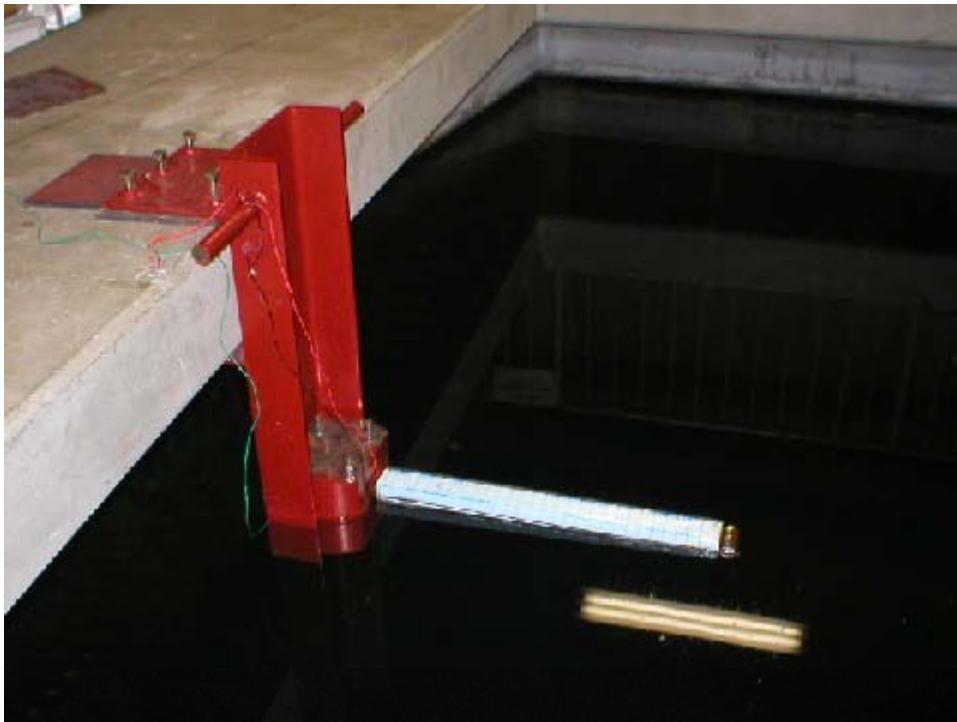


Photo 3.6.1 Specimen and instrument for measurement on water

このウレタンを貼り付けた状態の無次元減衰係数はウレタンの減衰効果が大きく $\gamma=1.0 \times 10^{-2}$ 程度となった。同じく Fig.3.6.3 および Fig.3.6.4 にウレタン接着時の対数減衰率 δ を示す。

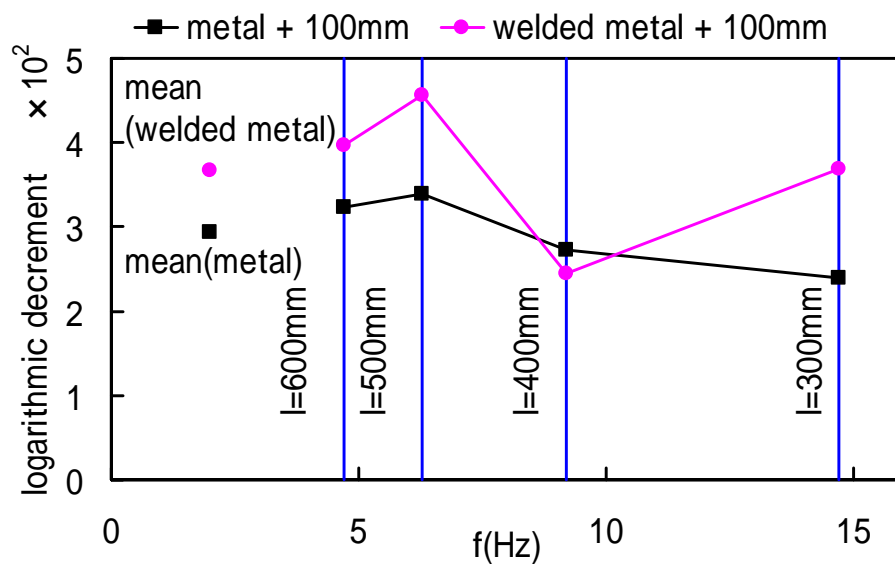


Fig.3.6.3 Logarithmic decrement for vibration in air with 100mm urethane

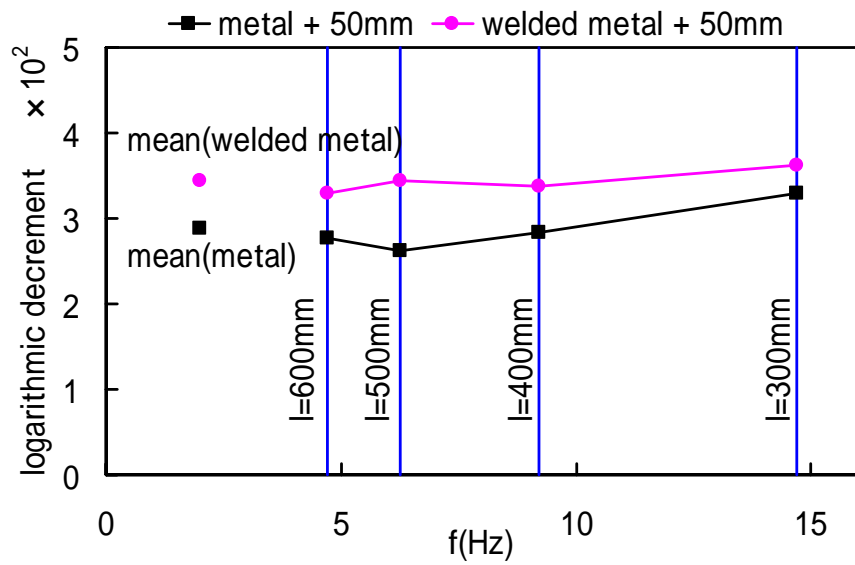


Fig.3.6.4 Logarithmic decrement for vibration in air with 50mm urethane

無次元係数 γ と対数減衰率 δ の間には次の関係を有する。

$$\delta = n\pi\gamma \quad (3.6.8)$$

本実験の場合は片持梁振動であり $n=1$ が該当する。

Fig.3.6.5 に 100mm 幅ウレタン接着の場合の接水対数減衰率と振動数の関係を同じく Fig.3.6.6 に 50mm 幅ウレタン接着の場合を示す。

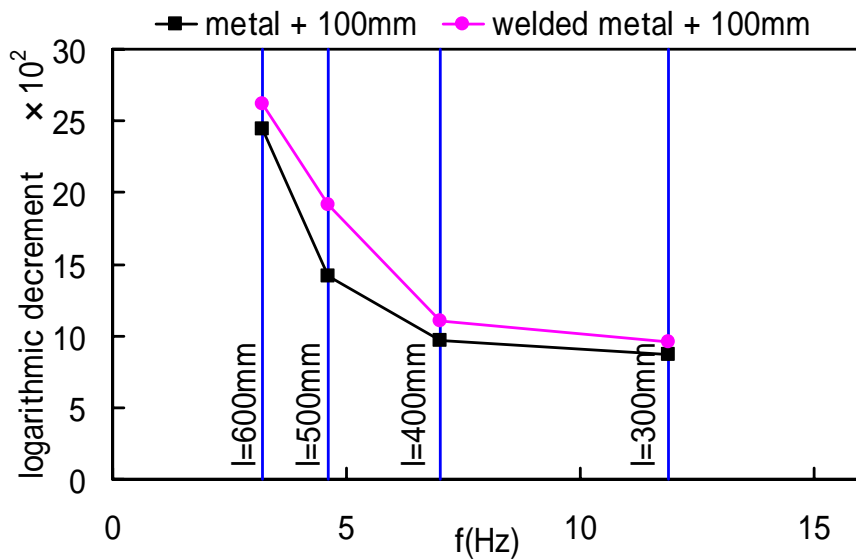


Fig.3.6.5 Logarithmic decrement for vibration on water with 100mm urethane

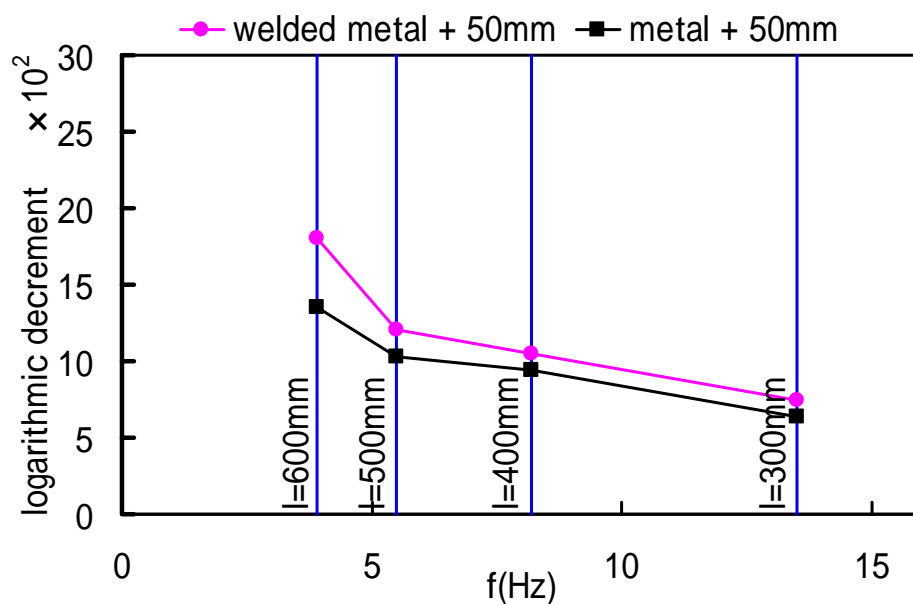


Fig.3.6.6 Logarithmic decrement for vibration on water with 50mm urethane

Fig.3.6.5 および Fig.3.6.6 の結果に (3.6.7)式を適用し，振動数を横軸に λ 値を縦軸にして結果をプロットしたものを Fig.3.6.7 に示す。バラツキは見られるものの， λ 値は振動数に対して正比例の関係がある。

$$\lambda = 2C_{\lambda} \omega_n \quad (3.6.9)$$

とおくと C_{λ} 値（無次元量）は

$$C_{\lambda} = 0.057$$

程度の値を有する。

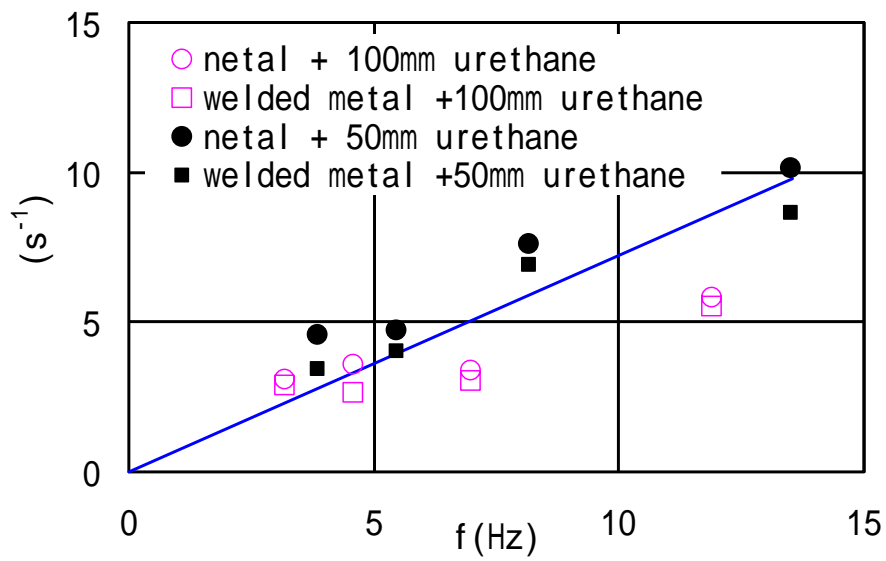


Fig.3.6.7 Relation of λ and frequency

同様の接水振動実験を 2.6.2 で記述した試験モデルのうち 2m モデルに対して行った。実験は幅 2.6m×長さ 3.6m×深さ 0.6m の水槽を用いた。

実験の状況を Photo 3.6.2 に示す。

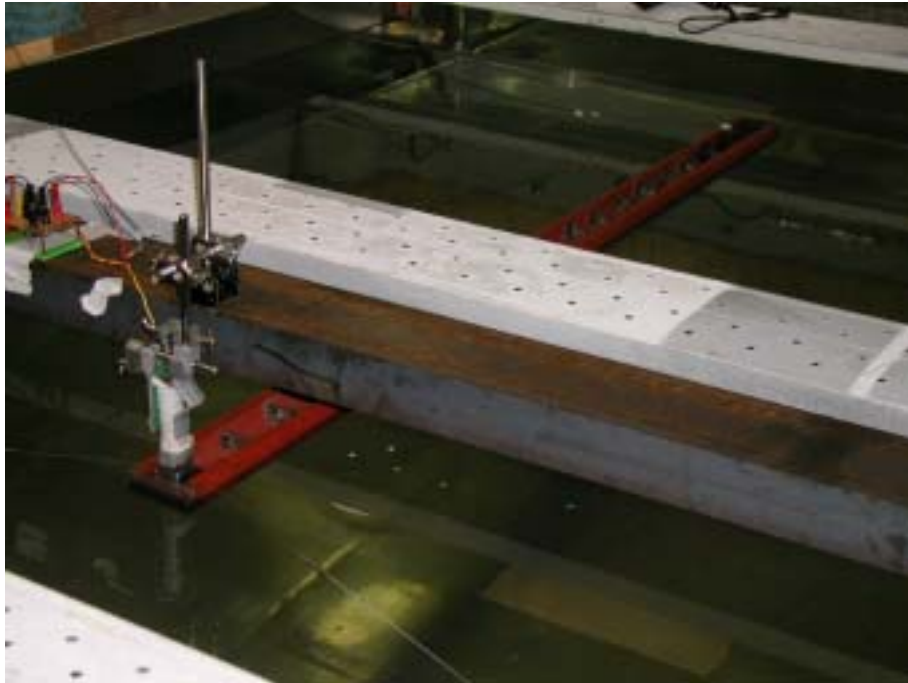


Photo 3.6.2 Specimen for free-free beam and instrument for measurement on water

接水時の対数減衰率の変化を振動節数を横軸にして Fig.3.6.8 に示す。計測値は構造減衰と流体減衰の和であり，当然空中時の値 (Fig.2.6.9) よりも大きくなる。

Fig.2.6.9 の空中振動実験値を差し引くことにより接水による対数減衰率が求められる。(3.6.7) 式の関係より求めた λ と振動数の関係を Fig.3.6.9 に示す。Fig.3.6.7 に示す片持梁のときと同様 λ は振動数に対して比例関係を有するが $\lambda = 2C_\lambda \omega_n$ とおいたときの C_λ 値は片持梁のときに比べて約 1/20 に低下している。これは片持梁のときには試験片が平板で剛性が小さく，振動変位が大きかったことのため自由表面での波が大きかったのに比較し，溝型鋼の場合は剛性が大きいため振動変位が小さく水面波動がほとんど見られなかったことが原因しているものと思われる。

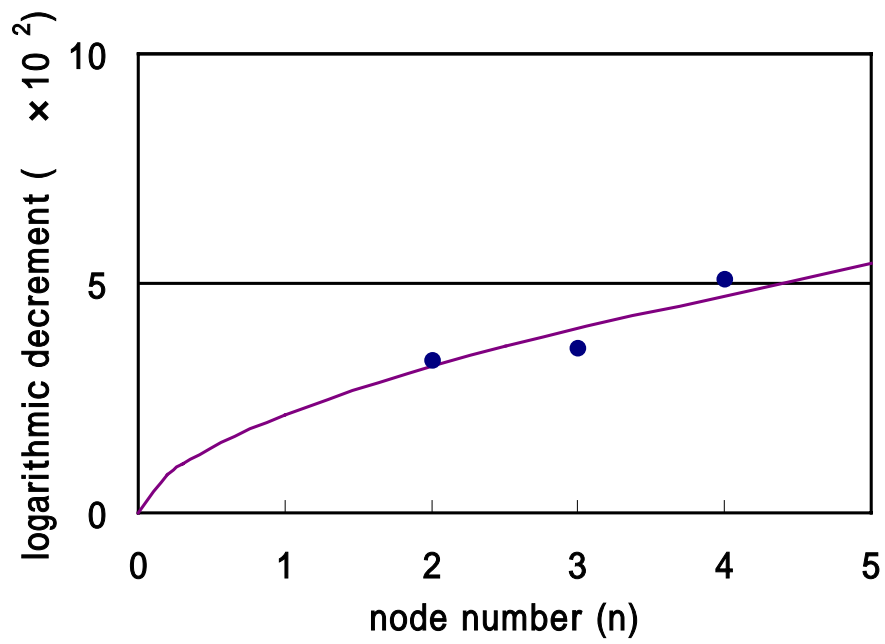


Fig.3.6.8 Relation between logarithmic decrement and nodal number (on water vibration)

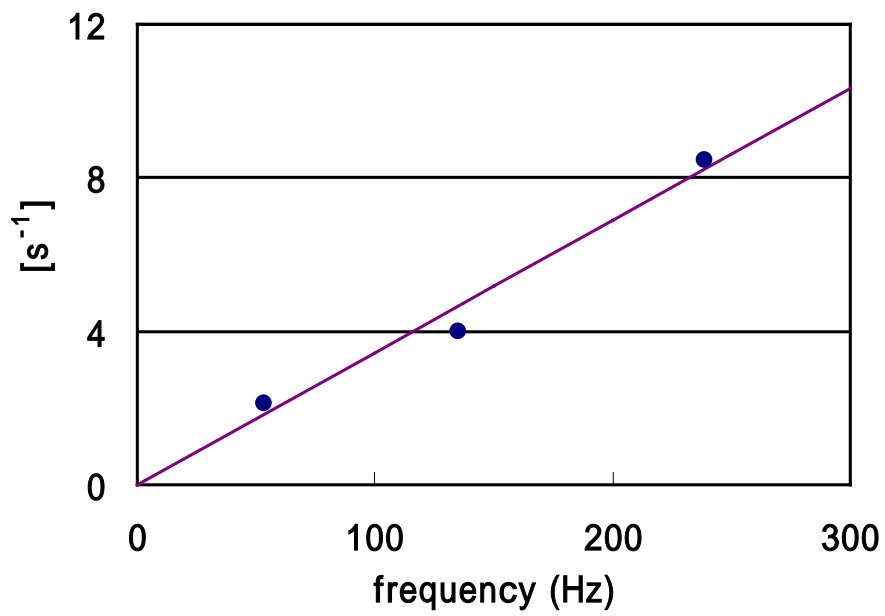


Fig.3.6.9 Relation between λ and frequency

3.6.2 実船形状と Lewis 変換による形状との比較

船舶の前後部は船の推進抵抗を極小化させるべく、独特の断面形状を有する。数式で船型表示をする試みは過去行われてきたが、いまだ成果として示されたものはない。振動問題に限定するならば、例えそれが正確な船型形状を与えなくとも、傾向が類似で、ほぼ船型の状況を求めることができれば十分である。このため 3 個のパラメータで表現される Lewis 変換式を用いて近似船型とすることが一般的である。

Fig.3.6.10 に船首尾付近の形状を Lewis 変換形状と比較した結果を示す。ほぼ良好な対応を示していることがわかる。

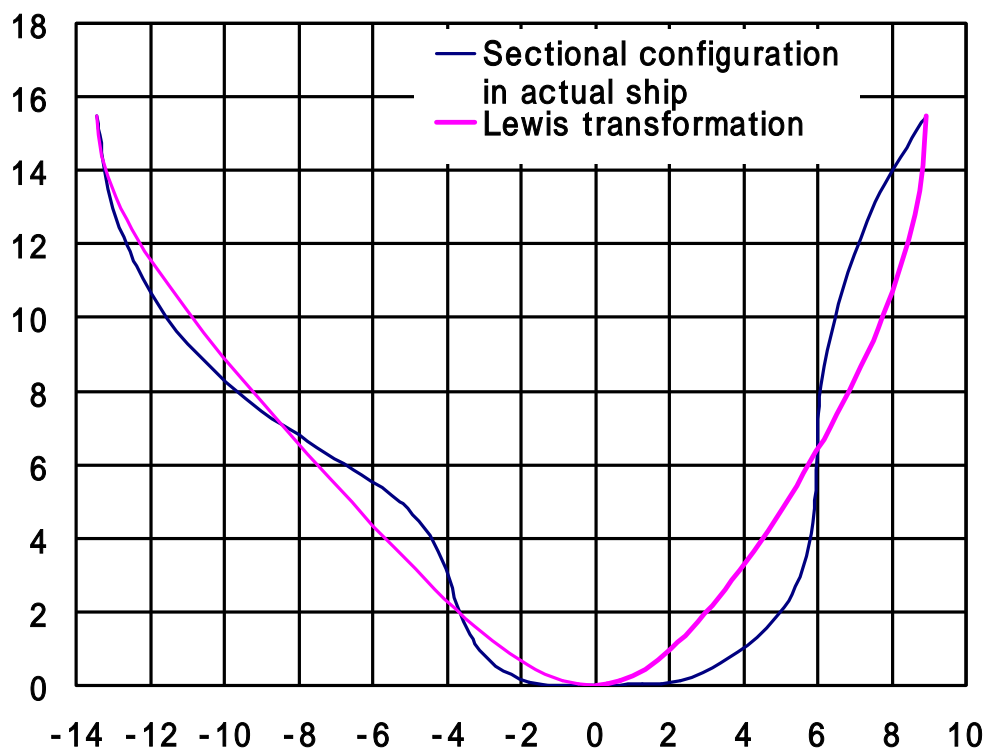


Fig.3.6.10 Comparison of hull section at midship with Lewis' form

また船体中央部のほぼ矩型の形状をした部分の比較を Fig.3.6.11 に示す。船の片幅を 20m とし、吃水を 6,12,18m と変化させたも

のであるがビルジサークル（角の丸みを帯びた部分）付近を除き良好な船型表現ができている。船側部の形状のわずかな違いはあるが付加質量効果におよぼす影響は小さく無視できる。

以上より付加質量計算にあたっては Lewis 変換を用いる実用的価値は実証された。

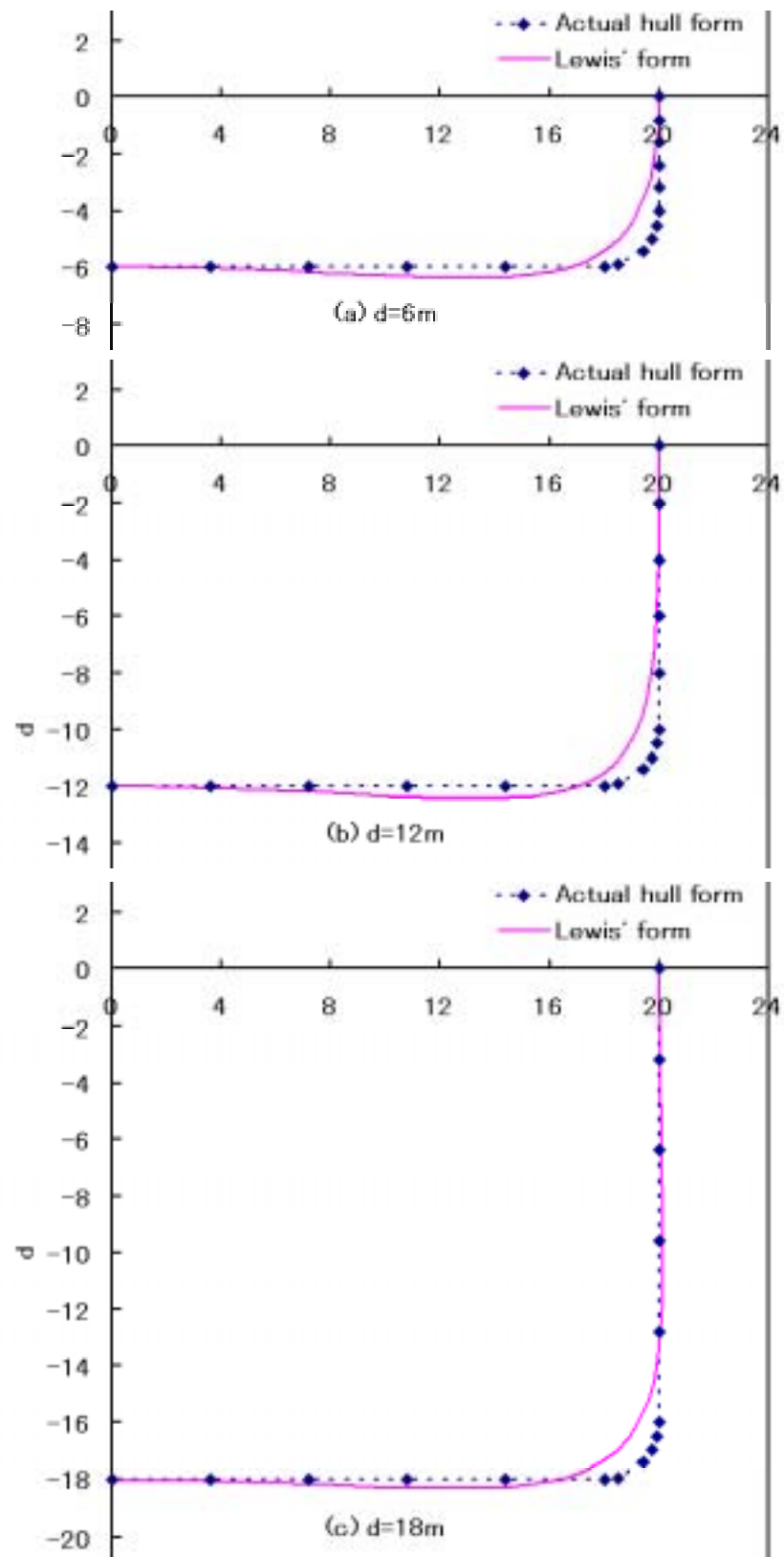


Fig.3.6.11 Comparison of hull section at midship with Lewis' form

3.6.3 船底速度分布の違いによる二次元付加質量の比較

船体底部に垂直方向の速度が船の幅方向に一定となる場合については Lewis により Schwartz-Christoffel 変換を用いることにより矩型断面を平面に写像する方法を用いて二次元付加質量を計算する方法が発表されている [16]。また熊井 [18] により Lewis 変換を用いた計算法が発表されており，一般にこれを Lewis の方法と称している。

3.3 節において示した計算法では速度が放物線分布する場合についても，主船体の上下振動（速度が均一に船底に分布する）と二重底が連成する場合も計算が可能である。

3.3 節の方法にしたがって数値計算を行った。対象とする船舶を Table 3.6.1 に示す。ケープサイズバルクキャリアー，アフラマックスタンカーおよび小型ガス船と船のサイズをほぼ網羅する 3 隻に対して二次元付加質量に関して

$m_{\ell 11}$ ：船底に流速が均等分布する場合

$m_{\ell 22}$ ：船底に流速が放物線分布する場合

$m_{\ell 12}=m_{\ell 21}$ ：連成効果による場合

について計算を行った。結果を Fig.3.6.12, Fig.3.6.13 および Fig.3.6.14 に示す。図からわかるように流出量の多い $m_{\ell 11}$ が最も大きな値をとるのは当然としても，連成効果によるものが放物線分布するものより大きくなるのは注目される。

Table 3.6.1 Principal Dimension of Ships for added mass evaluation

Ship type		Cape size	Afra max T.	Gas carrier
Principal Dimension	L(m)	279.00	232.00	148.00
	B(m)	45.00	42.00	25.00
	D(m)	24.40	21.20	16.50
	d(m):ballast	7.63	7.21	6.40

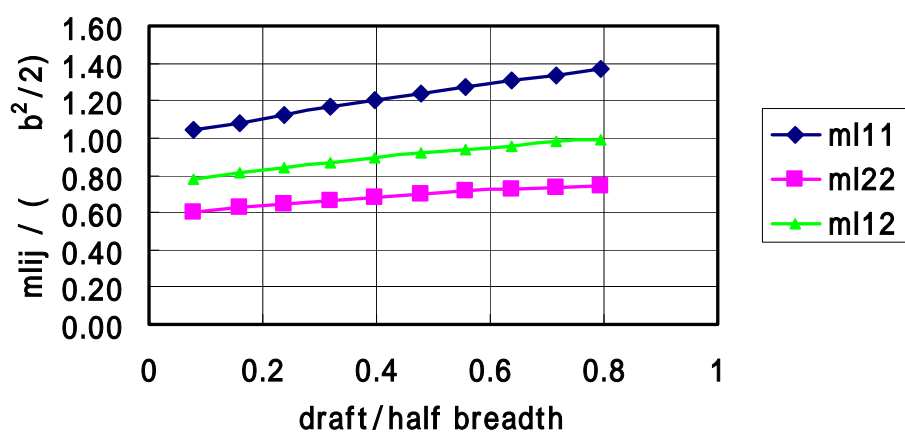


Fig.3.6.12 Two dimensional added mass coefficient for Cape size bulk carrier

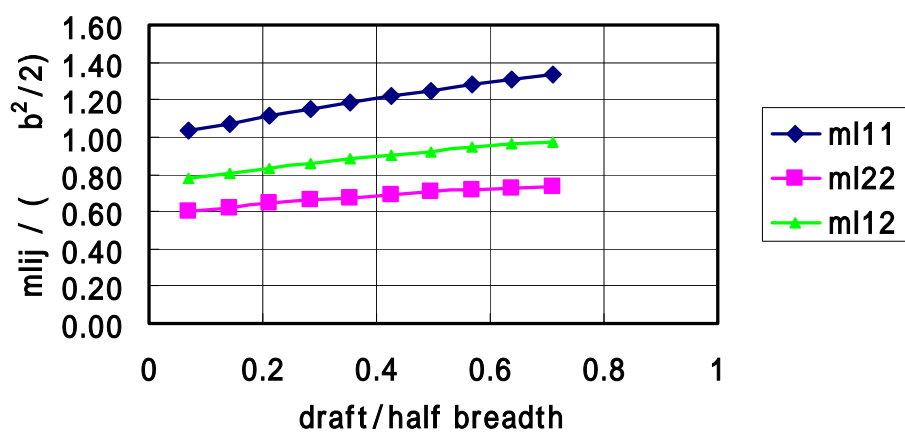


Fig.3.6.13 Two dimensional added mass coefficient for Aframax tanker

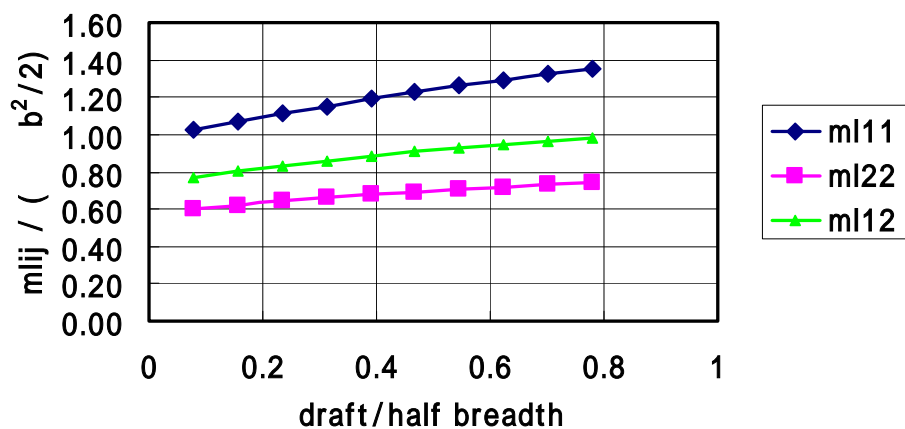


Fig.3.6.14 Two dimensional added mass coefficient for Gas carrier

3.6.4 付加質量三次元修正係数 J_{ij} の計算

前述した 3 隻の船に対して振動節数が三次元付加質量係数によぼす影響について検討を行った。

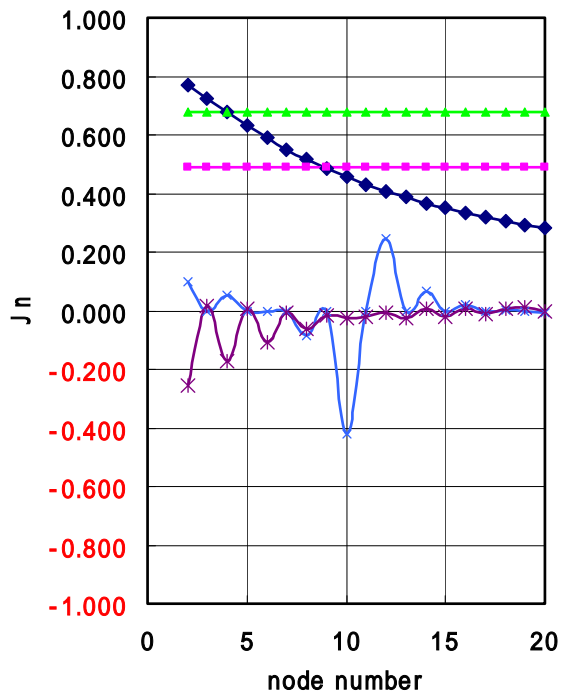
主船体振動に対する三次元付加質量修正係数 J_{11} については主船体振動節数が増加すれば減少していくのは船の長さ方向の拡散度合が大きくなることより当然予測されることである。

一方二重底の単独振動の付加質量三次元修正係数 J_{22} については主船体振動節数とは連成しないため一定値となる。ただし二重底が sine モードで振動する場合と sine の 2 乗モードで振動する場合では異なった値をとる。

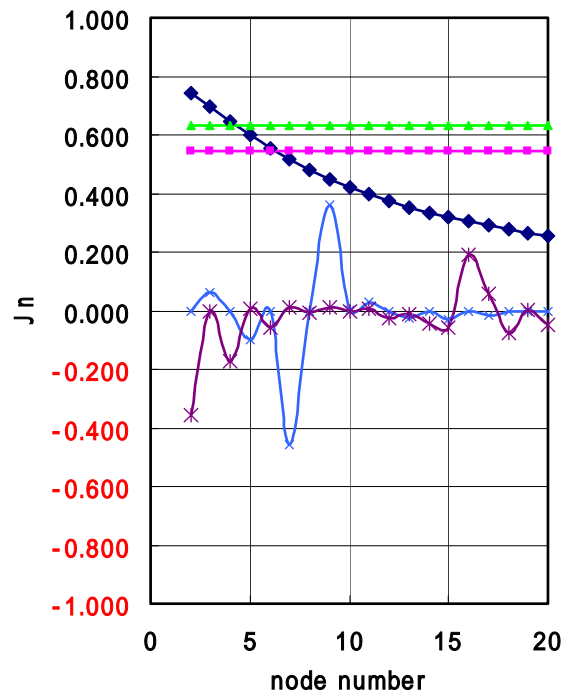
主船体振動と二重底振動が連成する場合には主船体振動節数によって変化が生じ節数によっては負の三次元修正係数を得ることが明らかとなった。

結果をケープサイズバルクキャリア、アフラマックスタンカーおよびガス船に関して吃水を 2m、4m、6m、8m、10m に変えた場合について Fig.3.6.15～Fig.3.6.19 に示す。

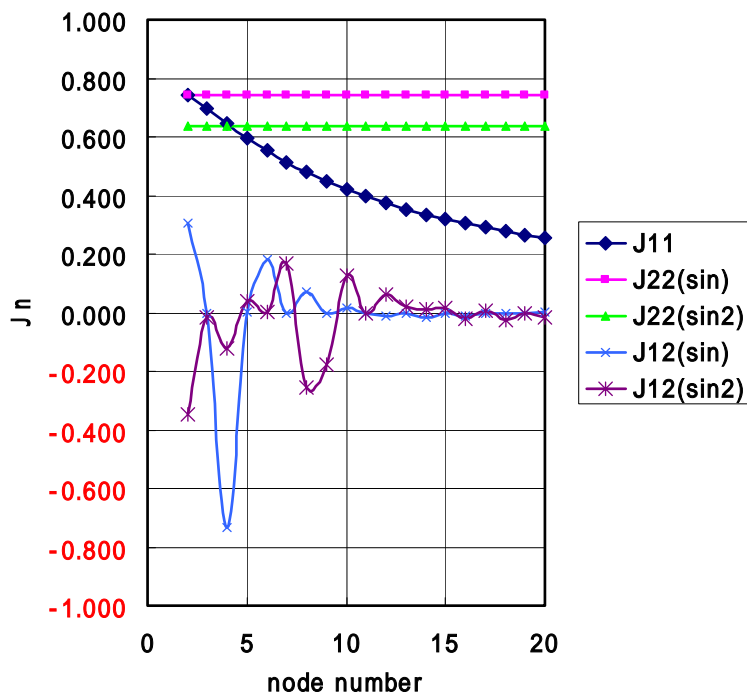
付加質量については実験的に定量化することは困難である。理論計算による数値的把握がその手段とならざるを得ない。



(a) Cape size bulk carrier

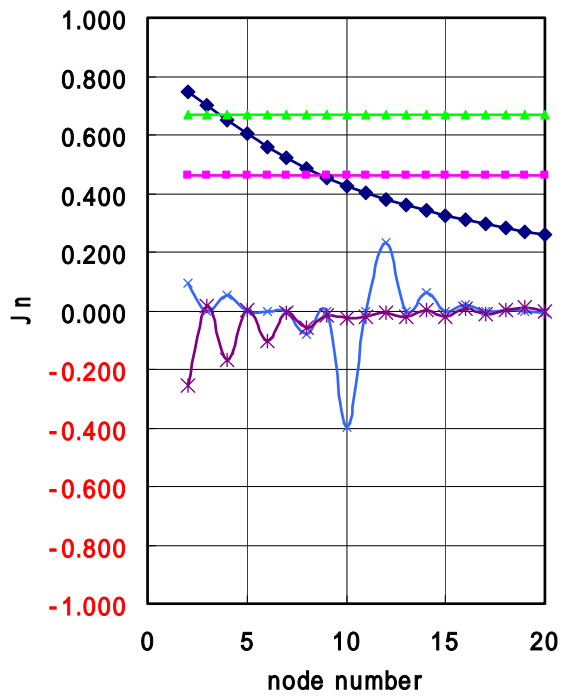


(b) Aframax tanker

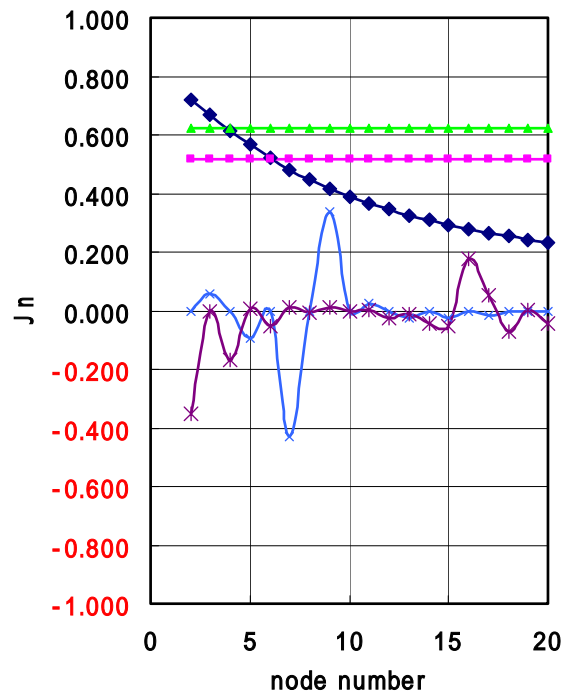


(c) Gas carrier

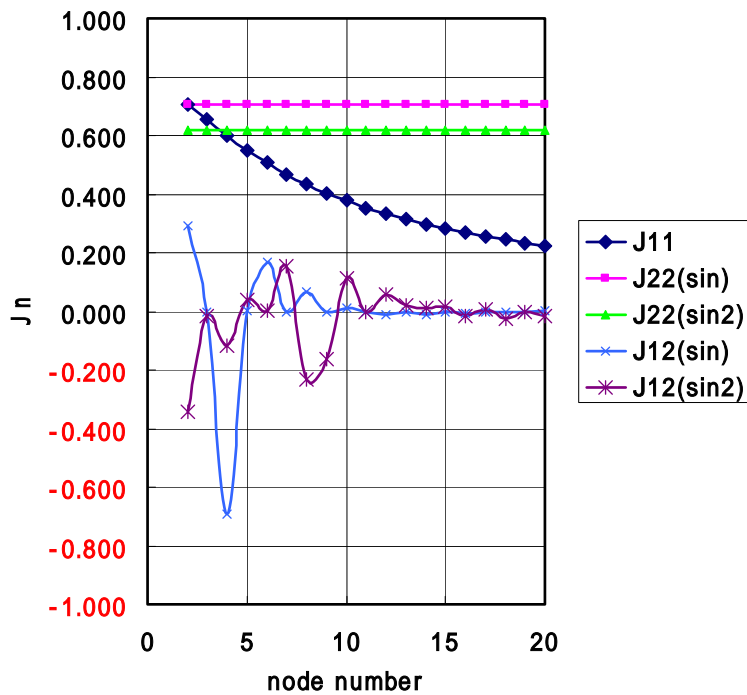
Fig.3.6.15 Correction factor for three dimensional added mass
in case of 2m in draft



(a) Cape size bulk carrier

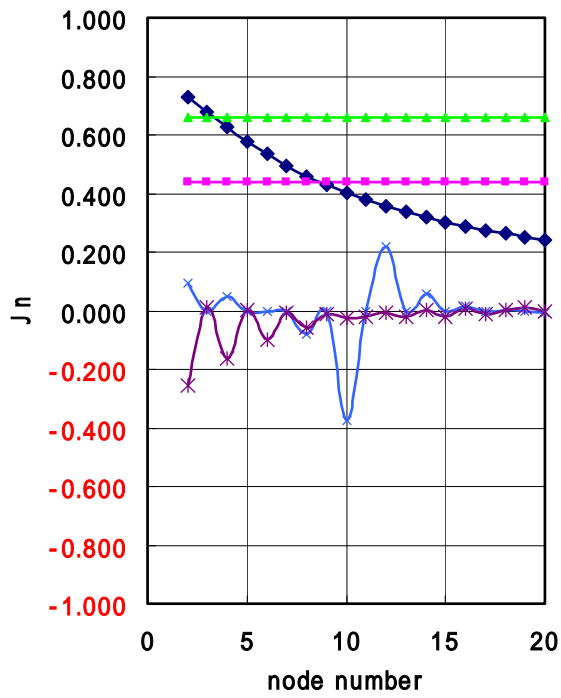


(b) Aframax tanker

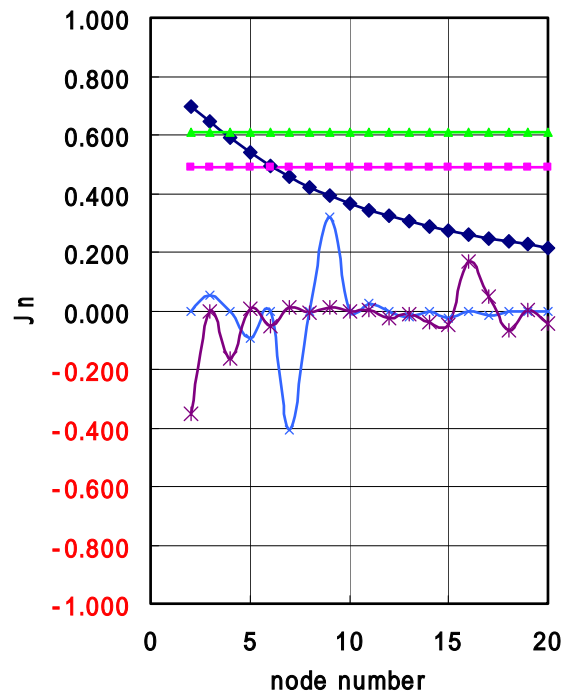


(c) Gas carrier

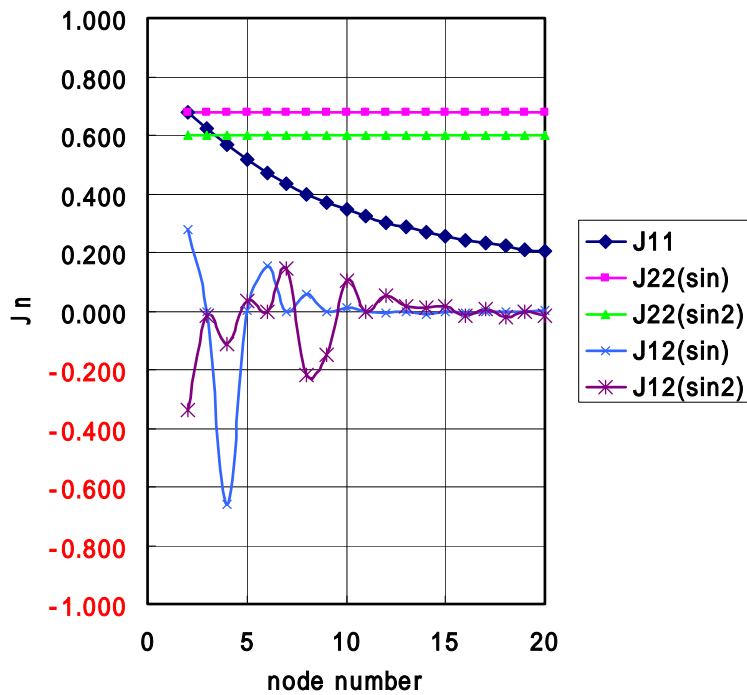
Fig.3.6.16 Correction factor for three dimensional added mass
in case of 4m in draft



(a) Cape size bulk carrier

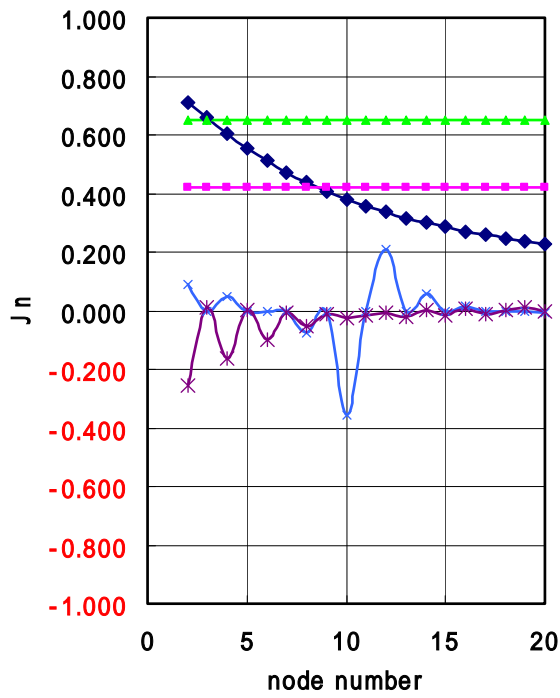


(b) Aframax tanker

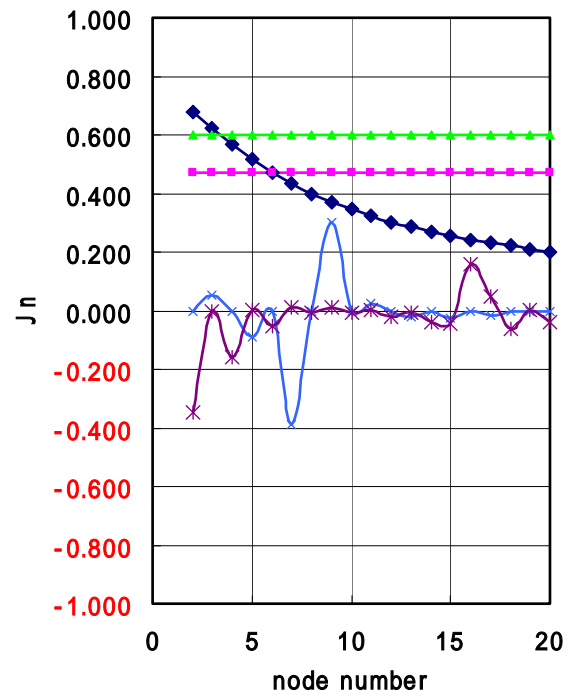


(c) Gas carrier

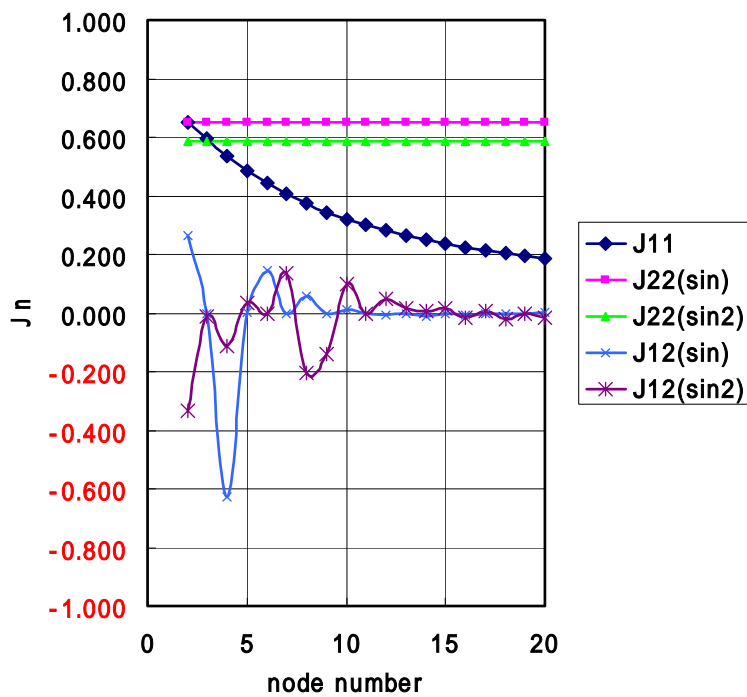
Fig.3.6.17 Correction factor for three dimensional added mass
in case of 6m in draft



(a) Cape size bulk carrier

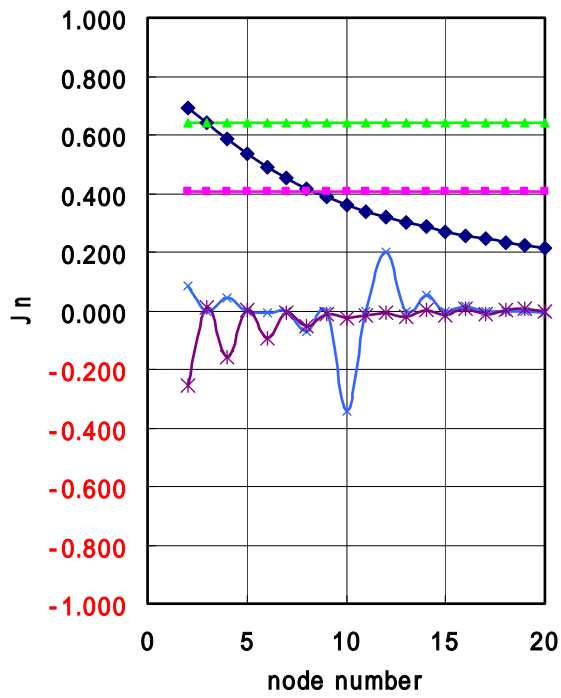


(b) Afra max tanker

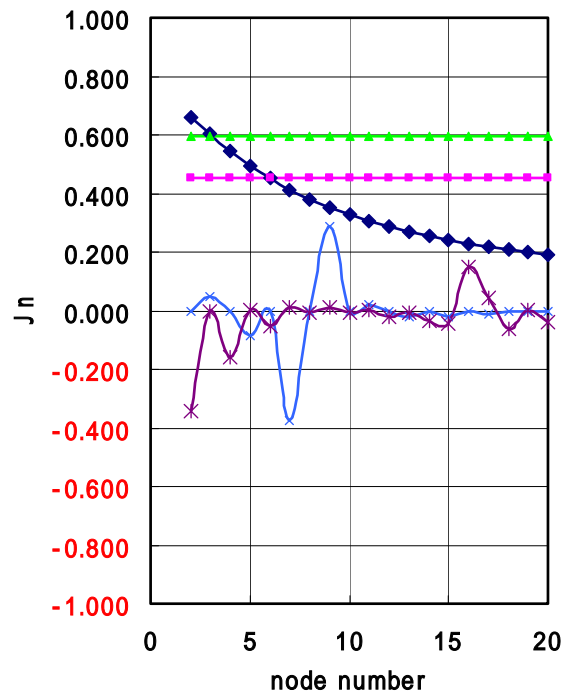


(c) Gas carrier

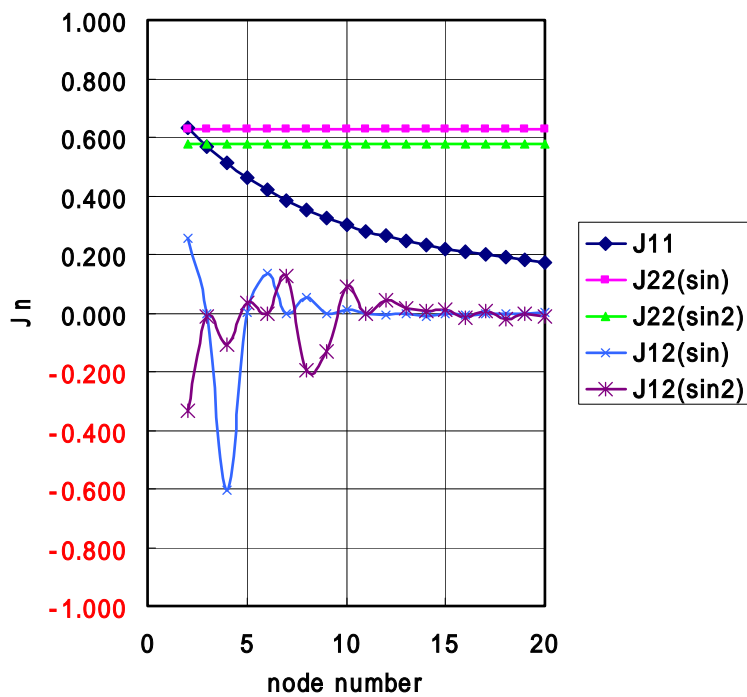
Fig.3.6.18 Correction factor for three dimensional added mass
in case of 8m in draft



(a) Cape size bulk carrier



(b) Afra max tanker



(c) Gas carrier

Fig.3.6.19 Correction factor for three dimensional added mass
in case of 10m in draft

3.7 結言

3 章においては，主として主船体の曲げ振動のように断面は剛体的に上下に振動するものとバルクキャリア二重底構造のように船の幅方向にも振動速度が異なるものが連成する場合すなわち複合振動場における付加質量の計算法について記述し以下のような結果を得た。

(1) ポテンシャル場における付加質量と流体減衰力（3.2 節）

ポテンシャル場すなわち完全流体を仮定している以上，減衰エネルギーの発生はあり得ないが，Rayleigh は速度に比例する抵抗の概念を完全流体場に適用することによりエネルギーの発散を可能とした。

まず付加質量 M_ℓ については速度ポテンシャル $\phi(x, y, z, t)$ を次のようにおいたとき

$$\phi(x, y, z, t) = \dot{\delta}(t) \bar{\phi}(x, y, z)$$

$$M_\ell = \rho \int_s \bar{\phi} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} ds$$

として与えられることを明らかにし，時間あたりの減衰エネルギー D が

$$D = \frac{1}{2} \lambda M_\ell \dot{\delta}^2$$

という簡単な形で表現できることを明らかにした。ただし $\phi(x, y, z, t)$ が関数の形で明らかにされていることが結果を得る前提となる。

(2) 二次元流体場における運動エネルギーと付加質量（3.3 節）

系の運動エネルギー T （付加質量）にしても時間あたりの減衰

エネルギー D にしても速度ポテンシャル関数が求められていなければそれらを定量化できない。したがってまず二次元問題としての速度ポテンシャル ϕ と流れ関数 ψ に関して式の誘導を試み、船底の速度場が放物線分布をするときの解を得た。そしてその特別な場合が流体速度船底に均一分布する場合であり、この場合の解はよく知られた Lewis の式と一致することを明らかにした。船底における船体速度が船の幅方向に放物線分布する場合の二次元付加質量 m_ℓ は

$$m_\ell = \frac{\rho}{2} \pi b^2 \xi^2 \sum_s \alpha_s \beta_s$$

という形で計算できることを示した。

(3) 三次元流体場における流体運動エネルギーと付加質量(3.4 節)

三次元場においては振動時の流体拡散が二重の意味で生じる。一つは振動モードにより船の長さ方向に流体が拡散するものであり、他は船の長さが有限であることにより拡散するものでその概念図を Fig.3.4.1 に示した。

流体運動エネルギーあるいは付加質量を計算する三次元空間での速度ポテンシャル ϕ あるいは流れ関数 ψ を求める必要があるが、円筒関数を用いることによりその計算法を明らかにした。なおこの計算においては船の長さ方向の変数 z に関する Fourier sine 展開が必要となるが、主船体振動および二重底振動が単独に生じる場合とこれらが連成する場合に関してその関数を決定した。

(4) 複合振動場における流体運動エネルギーと付加質量(3.5 節)

実際の振動計算においては船体各断面に付加質量を二次元的に分布させることになるがこのときの現実の流体運動で生じる三次元効果を三次元修正係数という形で考慮する。

主船体振動と二重底振動が同時に生ずるような複合振動場では、主船体単独の場合の三次元修正係数 J_{11} 、二重底単独の場合の J_{22} および連成時の J_{12}, J_{21} が計算できなければならないが、この計算法を明らかにし、 J_{12} と J_{21} が同等の値を与えることを示した。

(5) 実験および数値計算による検証（3.6 節）

流体が船体振動によって攪乱されて生じる流体運動エネルギーを直接的に実験により明らかにすることはできない。このための純解析的な手法が採用されるわけであるが、流体運動エネルギー T と時間あたりの減衰エネルギー D との間には実験係数 λ を介して次の関係

$$D = \lambda T$$

を有することを示し、解析的に求めた T を用い、片や時間あたり減衰エネルギー D を実験的に求めることにより実験係数 λ を定量化した。

なお実験は片持梁と両端自由のビームの両者で行ったが片持梁の場合、剛性が小さく振動変位が大きかったため液面上の造波現象が大きく両端自由ビームの場合に比較して λ 値が大きくなった。

今後種々のケースで実験を行い、 λ 値（無次元値では C_λ 値）の定量化をはかる必要がある。

また 3.3 節で明らかにした二次元付加質量について 3 隻の船で数値的な比較を行い、主船体単独振動時の m_{11} 、二重振動時の m_{22} および連成時の m_{12} について吃水を種々変化させ場合の値の変動をシミュレーションした。また三次元修正係数 $J_{11}, J_{22}, J_{12}(=J_{21})$ について、主船体節数に対しての変動をシミュレーション計算により明らかにした。

第 4 章

荷重および剛性の分布が長さに沿って変化する 主船体の振動数予測法

4.1 序言

4.1.1 概要

船舶における振動が問題となるのは主として主船体後部に配置される居住区画および機関室においてである。

しかしこれら区画の振動は，主船体振動（貨物倉内二重底構造等との連成を含む）によって影響を受けるし，主船体振動との連成影響も大きい。

このためまず，二重底構造等との連成を考えない主船体単独の振動についてその予測法を確立したい。

主船体振動は断面剛性が船の長さ方向に変化するいわゆる変断面剛性体であること、および荷重分布がやはり船の長さ方向に不連続的に変化するため，解析的な振動解析はまず不可能であり，有限要素法による数値解析が多用されてきた。

有限要素法による解析は確かに正値を与えるかもしれないが，設計初期の段階で振動予測を行うには数値データが不足しており，常に設計後期における後追い解析のジレンマに陥る欠点がある。本章はこのような変断面を有する主船体の振動をエネルギー法を用いることにより高い精度での振動数推定法を導く。

4.2 節においては主船体断面形状の特徴について述べ，このような特殊な断面形状を有する船体を数値的に表示する方法について述べる。

主船体振動においては主船体の振動により環境流体に変動速度場が生じることによる付加質量効果が生じるが，この船型の数値表示は3章で記述した付加質量計算において用いられる。

また断面剛性（曲げ剛性 EI ，剪断剛性 GA_w ）および荷重分布の数式表示法について言及する。

4.3 節では4.2 節で明らかにされた剛性や荷重の数式表示法を用いて主船体振動数の予測を行う。

まず変断面ビームにおける振動たわみの特性についてふれ、振動が高次になるにしたがい船体中央部での振動変位が小さく船首尾端で大きくなる特性について言及し、そのような特性を表現するたわみ関数を提案する。主船体振動は曲げ振動と剪断振動が合成されたものとして与えられる。これをエネルギー式を用いて解く場合には 4 個の未知変位係数が与えられるが、この場合の振動数予測法について記述する。

4.4 節では将来的に主船体振動と二重底構造あるいは上部構造との連成振動を考察するときのために、4.3 節における未知係数 4 個を用いた計算からこの未知係数を 1 個とする簡易計算法を展開する。連成振動を検討する場合、未知係数の数が多いと全体の見通しが効きにくくなるためである。

4.5 節では 4.3 節において求める 4 パラメータによる場合と 4.4 節において求める 1 パラメータの場合について数値計算を行い、これと有限要素法による数値解析結果との精度比較を行い、計算法の有用性を検証する。

4.6 節では 4 章での成果のまとめを行う。

4.1.2 本章で用いられる記号とその説明

ℓ	: 船の長さ [m]
b	: 船の半幅 [m]
$b(\xi)$: 各断面における水線面半幅 [m]
d	: 船の吃水 [m]
A_w	: 水面における船体の水線面面積 [m ²]
S_m	: 船体中央断面における船の半幅あたりの面積 [m ²]
$S(\xi)$: 各断面における半幅あたりの没水面積 [m ²]
C_w	: 水線面係数 [無次元] すなわち A_w と $b\ell$ との比
C_m	: 中央断面係数 [無次元] すなわち S_m と bd との比
C_b	: 方形係数 [無次元] すなわち排水量と $2\ell bd$ との比
EI	: 中央部における水面を軸とした軸まわり曲げ剛性 [N・m ²]
$EI(\xi)$: 各断面における曲げ剛性 [N・m ²]
GA_w	: 中央部における水面に対して上下方向の剪断剛性 [N]
$GA_w(\xi)$: 各断面における剪断剛性 [N]
w	: 中央部における単位長さあたり荷重 (付加質量を含む) [N・m ⁻¹]
$w(\xi)$: 各断面における単位長さあたり荷重 [N・m ⁻¹]
δ_{b1}, δ_{b2}	: 曲げたわみに関する未知係数 [m]
δ_{s1}, δ_{s2}	: 剪断たわみに関する未知係数 [m]
ω_b	: 曲げ振動に関する円固有振動数 [s ⁻¹]
ω_s	: 剪断振動に関する円固有振動数 [s ⁻¹]
U_b	: 曲げによる歪エネルギー [N・m]
U_s	: 剪断による歪エネルギー [N・m]
T	: 運動エネルギー [N・m]
u_{ij}	: 無次元曲げ歪エネルギー [無次元]
\bar{u}_{ij}	: 無次元剪断歪エネルギー [無次元]
t_{ij}	: 無次元運動エネルギー [無次元]
η_{nb}	: δ_{b2}, δ_{b1} の比 [無次元]
η_{ns}	: δ_{s1}, δ_{s2} の比 [無次元]

- $\Gamma_{nb}(\xi)$: 曲げたわみ関数 [無次元]
 $\Gamma_{ns}(\xi)$: 剪断たわみ関数 [無次元]
 $\tilde{\Gamma}_{nb}(\xi)$: $\Gamma_{nb}(\xi)$ の ξ に関する 2 度微分値 [無次元]
 $\tilde{\Gamma}_{ns}(\xi)$: $\Gamma_{ns}(\xi)$ の ξ に関する 1 度微分値 [無次元]
 \tilde{t}_{ij} : 運動エネルギー係数 [無次元]
 ζ_n : 剪断変形感度係数 [無次元]

4.2 主船体形状の特徴と剛性および荷重分布

水上船舶の形状は，航行時の流体からの抵抗（主として造波抵抗と摩擦抵抗）を極小化させるべく，船の前後方向に向かって痩せた形状を採用する。

船尾を 0，船首を 10 と番号付けし（ordinate number），各断面位置における形状を示した正面線図（body plan）の一例を Fig.4.2.1 に示す。

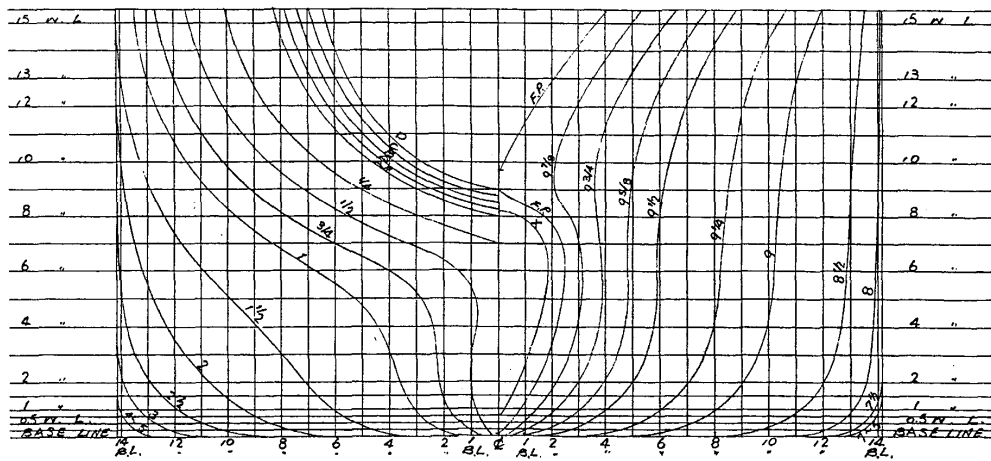
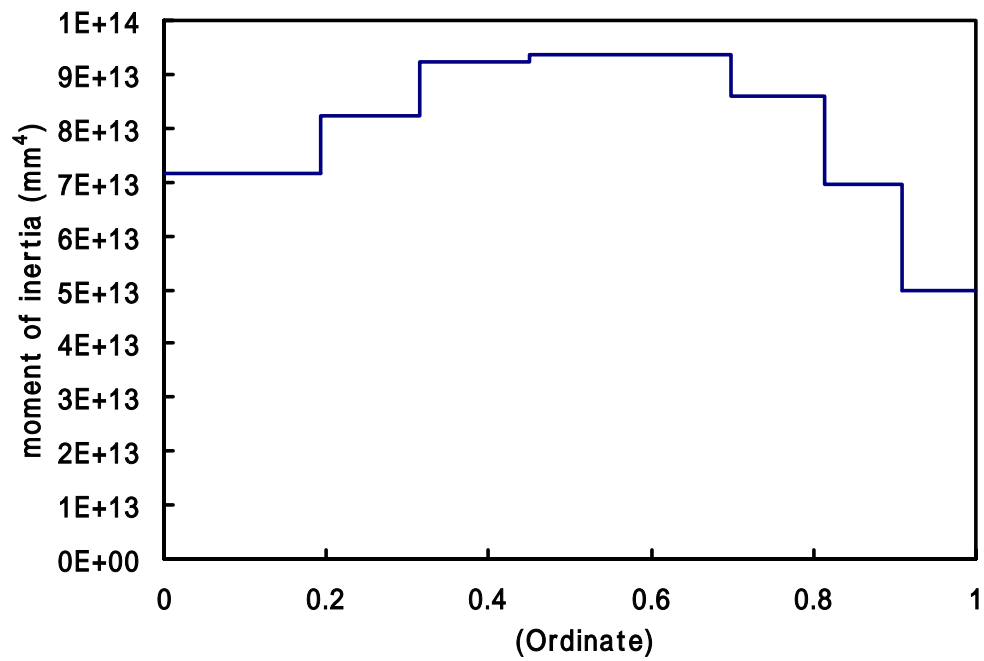
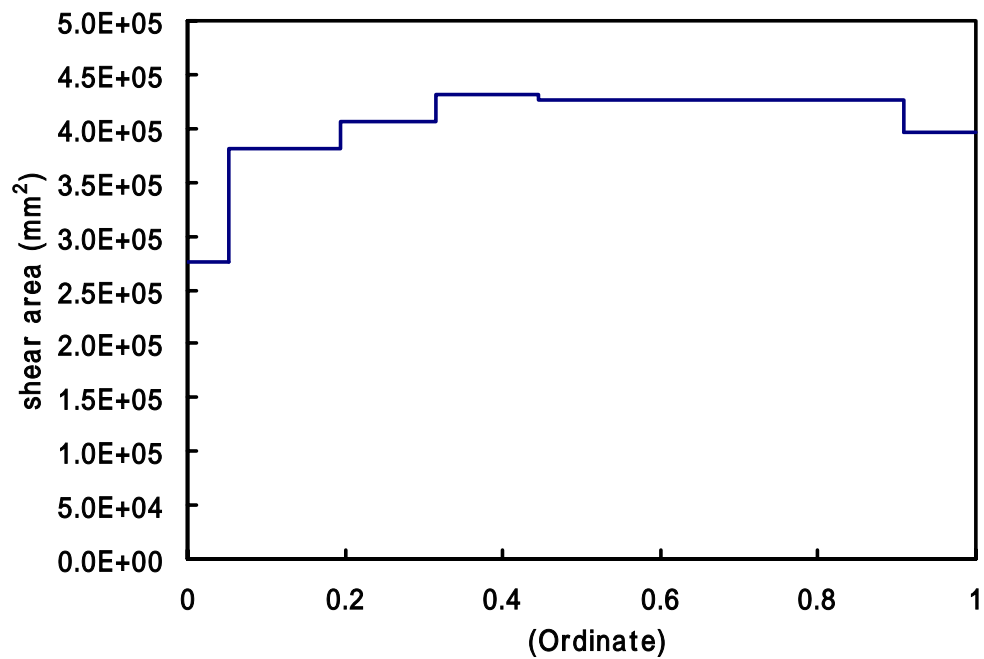


Fig.4.2.1 Example ships sectional form

このような変断面形状を有することもあり，船の剛性や荷重分布は均等とはならない。剛性分布の一例を Fig.4.2.2 に，荷重分布の例を Fig.4.2.3 に示す。

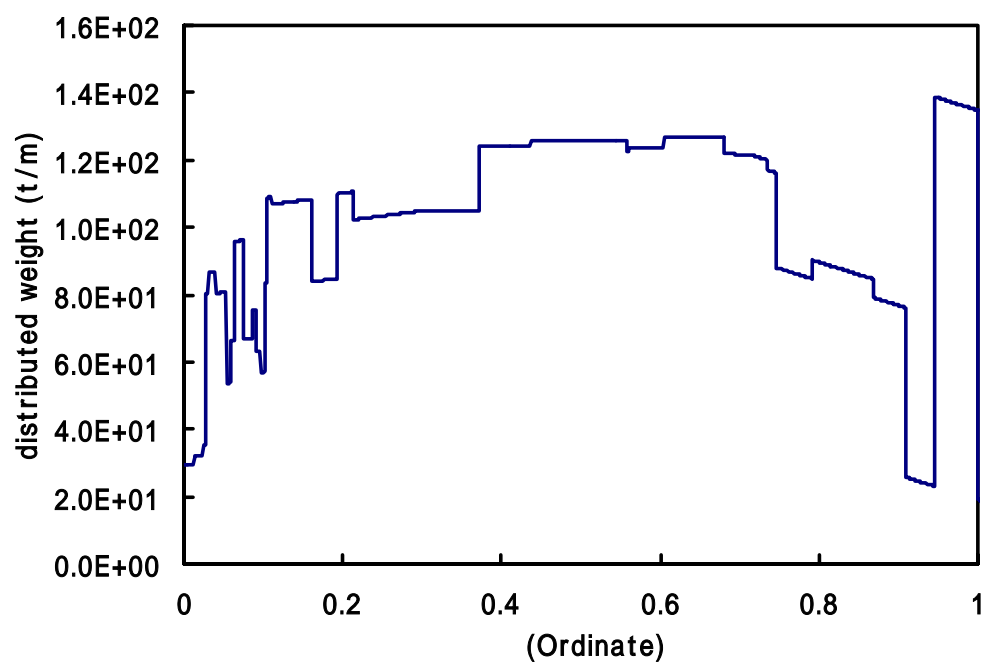


(a) Actual distribution for moment of inertia (I)



(b) Actual distribution for shear area (Aw)

Fig.4.2.2 Example of actual distribution for moment of Inertia(I) and shear area(Aw)



(c) Actual distribution for ship's weight (w)

Fig.4.2.3 Example of actual distribution for ship's weight

また，船体形状の特性を表す係数系が存在し，船舶設計における重要なパラメータとして多用される。このうち代表的な係数である方形係数 c_b ，中央断面係数 c_m ，水線面係数 c_w に対する概念図を Fig.4.2.4 に示す。

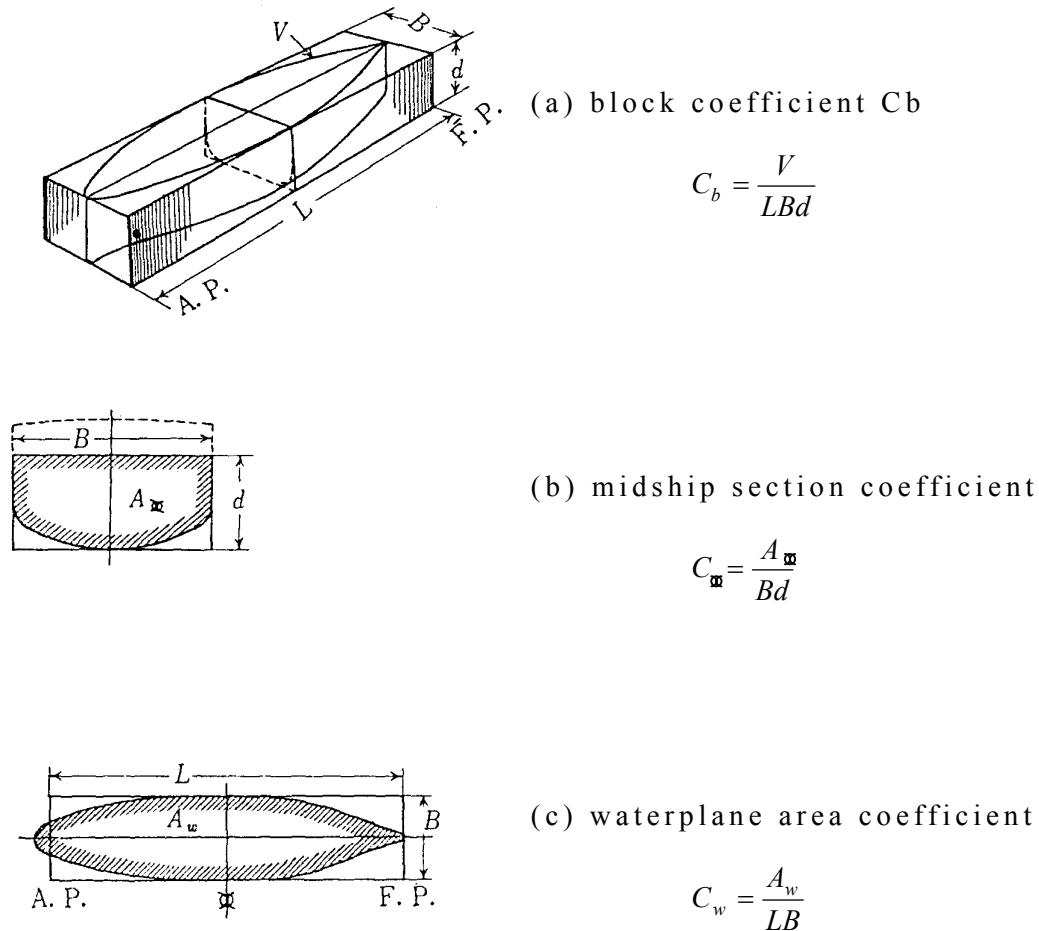


Fig.4.2.4 Fineness coefficient of ship

このように複雑な船体形状を有する船体の振動を高精度で推定しようとするれば，図面や情報の整った設計後期に船全体を要素分割した膨大なデータによる有限要素法解析がその対策となるが，多品種小量生産の造船では，自動車における振動解析のような徹底性は現実的でなく，極力簡潔な方法で精度よく推定を行うことが望ましい。しかもデータが不完全な初期計画段階でその目的

を達する必要がある。

設計初期段階において有する情報は船体中央断面における剛性，船体主寸法（船の長さ，幅，吃水等），排水量（すなわち貨物等を含めた全重量に等しい）船体係数（ c_b, c_m, c_w ）程度である。これら限定されたデータから振動予測に必要なデータを生成させる方法について記述するのが本節の目的である。

4.2.1 船体形状の数式表示

主船体断面形状は Fig.4.2.1 に示すように前後非対称であるが、船の前後方向に大きな傾斜がつかないように、浮心位置(浮力の中心となる座標)は船の中央部やや前方に設定されるのが一般的であるので、断面形状は前後非対称であるとしても没水断面積はほぼ前後対象となる。したがってこのような船体形状を前後対称として関数表示を試みる。

主船体が振動する場合、環境としての流体にも波動が伝達され流体運動エネルギー(いわゆる付加質量効果)が発生するが、この定量化のために Lewis 変換を用いることは 3.3 節で記述した。それによると、断面形状は 3 個のパラメータすなわち水面での半幅 b 、吃水 d 、断面積 S の 3 個で定義されることになる。 d は前後一定(いわゆるトリム無し)とすれば b と S の長さ方向の分布を関数化することにより数式表示船型として船体形状を近似できる。

(1) 船の半幅 b の関数表示

船の長さ方向の座標を x とし、船の全長 l との比 $\xi=x/l$ で無次元化した場合の位置 ξ における水面半幅 $b(\xi)$ を次式で与える。

$$b(\xi)=b\left\{1-e^{-\alpha\xi}-e^{\alpha(\xi-1)}\right\} \quad (4.2.1)$$

ここで b : 中央部における船の水面半幅 [m]

水線面係数 c_w を用いると水線面面積 A_w は

$$A_w=2c_w b l=2b l \int_0^1 \left\{1-e^{-\alpha\xi}-e^{\alpha(\xi-1)}\right\} d\xi \quad (4.2.2)$$

という関係があるので、これを計算すると α は次のように与えられる。

$$\alpha=\frac{2}{1-c_w} \quad (4.2.3)$$

c_w は 0.8 程度の値をとるので $\alpha=10$ 程度となる。(4.2.3)式で計算した α を (4.2.1)式に代入することにより水面半幅分布を求めることができる。

(2) 没水面積 $S(\xi)$

(4.2.1)式と同様に半幅あたりの没水断面積 $S(\xi)$ を次式で与える。

$$S(\xi) = S_{\blacksquare} \left\{ 1 - e^{-\bar{\alpha}\xi} - e^{\bar{\alpha}(\xi-1)} \right\} \quad (4.2.4)$$

ここで S_{\blacksquare} : 中央部における没水断面積
このとき次の関係を満足しなければならない。

$$2c_b \ell b d = 2\ell b d c_{\blacksquare} \int_0^1 \left\{ 1 - e^{-\bar{\alpha}\xi} - e^{\bar{\alpha}(\xi-1)} \right\} d\xi \quad (4.2.5)$$

(4.2.5)式より β は次のように与えられる。

$$\bar{\alpha} = \frac{2}{1 - \frac{c_b}{c_{\blacksquare}}} \quad (4.2.6)$$

ここで c_b : 方形係数 (Fig.4.2.4 参照)

c_{\blacksquare} : 中央断面係数 (Fig.4.2.4 参照)

実船の数値は $c_b=0.75, c_{\blacksquare}=0.98$ 程度の値をとるので β は 8.5 程度の値となる。

以上により $b(\xi), S(\xi)$ が定義できたので, 与えられた d とあわせ 3 個のパラメータを用いることにより, 3.3.1 項で述べた断面の Lewis 変換が可能となり, 船体振動予測において重要な付加質量の推定が 3 章で記述した方法により実行される。

4.2.2 剛性および荷重分布の数式表示

Fig.4.2.2 に示した剛性分布は階段上ではあっても前後に向かって漸減の傾向を示す。一方荷重分布については Fig.4.2.3 に示すように長さ方向に凹凸が見られる。しかし船体重量に数倍する流体付加質量は前後になだらかに漸減する曲線分布を示すこともあり、荷重の凹凸をならした曲線分布に置き換えても振動予測にもたらず誤差は少ない。

したがって曲げ剛性，せん断剛性および荷重分布を次式で表すこととする。

曲げ剛性 $EI(\xi)$

$$EI(\xi) = EI \left\{ 1 - \tilde{\beta} \left(e^{-\beta\xi} + e^{\beta(\xi-1)} \right) \right\} = EI f(\xi) \quad (4.2.7)$$

せん断剛性 $GA_w(\xi)$

$$GA_w(\xi) = GA_w \left\{ 1 - \tilde{\kappa} \left(e^{-\kappa\xi} + e^{\kappa(\xi-1)} \right) \right\} = GA_w h(\xi) \quad (4.2.8)$$

荷重 $w(\xi)$

$$w(\xi) = w \left\{ 1 - \tilde{\gamma} \left(e^{-\gamma\xi} + e^{\gamma(\xi-1)} \right) \right\} = w g(\xi) \quad (4.2.9)$$

ただし， $w(\xi)$ には各節数毎に異なった値を与える付加質量（重量）項も含めて計算する。ここで ξ は船尾を 0，船首を 1 とした無次元変数である。

(4.2.7)式～(4.2.9)式に存在する係数 $\beta, \kappa, \gamma, \tilde{\beta}, \tilde{\kappa}, \tilde{\gamma}$ （いずれも無次元数）の求め方については付録 4.1 に示すが，具体的な船の剛性や，荷重の長さ方向分布に対し，全体として階段，凹凸の中央を通るような曲線を描き， $\xi=0, 0.25, 0.5$ に対する値を X_0, X_1, X_2 とし，次のように比をとり

$$\zeta_1 = \frac{X_1}{X_0}, \quad \zeta_2 = \frac{X_2}{X_0} \quad (4.2.10)$$

とおけば次式のように $\beta, \kappa, \gamma, \tilde{\beta}, \tilde{\kappa}, \tilde{\gamma}$ を決定することができる。

$$(\tilde{\beta}, \tilde{\kappa}, \tilde{\gamma}) = 1 - \frac{1}{\zeta_2} \quad (4.2.11)$$

$$(\beta, \kappa, \gamma) = 4\ell n \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{\zeta_2 - 1} \quad (4.2.12)$$

ただし, ζ_1, ζ_2 は $(\tilde{\beta}, \beta), (\tilde{\kappa}, \kappa), (\tilde{\gamma}, \gamma)$ ごとに分布が異なるので各々異なった値をとる。

4.3 エネルギー法による船体振動計算

変断面，不均一重量分布のビームの振動を微小要素のつり合い式，すなわち偏微分方程式により解くことは困難であり，エネルギー法による計算が現実的な対処となる。

本節では，まず均一ビームに対する曲げ振動方程式を用いた場合のたわみとエネルギー法で仮定するたわみとの比較を行い，さらに実船に対する数値解析結果を参考に，たわみ分布の特徴を指摘し，この分布を近似しうるたわみ関数を導く。主船体振動においては高次振動領域が問題となるが，この領域においては曲げに加えてせん断変形および回転慣性の影響が無視できない量となるのでこれらを含めたエネルギー法による主船体の固有振動数計算法を導くこととする。

4.3.1 振動モード

一般にエネルギー法を用いた船体たわみ振動の検討においては、振動モード $X_n(\xi)$ として次式が採用される。

$$X_n(\xi) = \cos \lambda_n \xi \quad (4.3.1)$$

ここで $\lambda_n = n\pi$ (n : たわみ振動の節数)

$\xi = x/\ell$ (ℓ : ビームの長さ)

一方、均一ビームで両端自由の場合における曲げ振動に対する厳密解は次式で与えられる。

$$X_n(\xi) = \frac{1}{2} \{ \cos \lambda_n \xi + \cosh \lambda_n \xi - \alpha_n (\sin \lambda_n \xi + \sinh \lambda_n \xi) \} \quad (4.3.2)$$

ここで $\alpha_n = \frac{\sinh \lambda_n + \sin \lambda_n}{\cosh \lambda_n - \cos \lambda_n}$

そして固有値 λ_n は

$$\cos \lambda_n \cosh \lambda_n = 1 \quad (4.3.3)$$

を満足するように決定される。(4.3.1)式と (4.3.2)式によるたわみおよびたわみの傾斜角の比較を Fig.4.3.1 に示す。

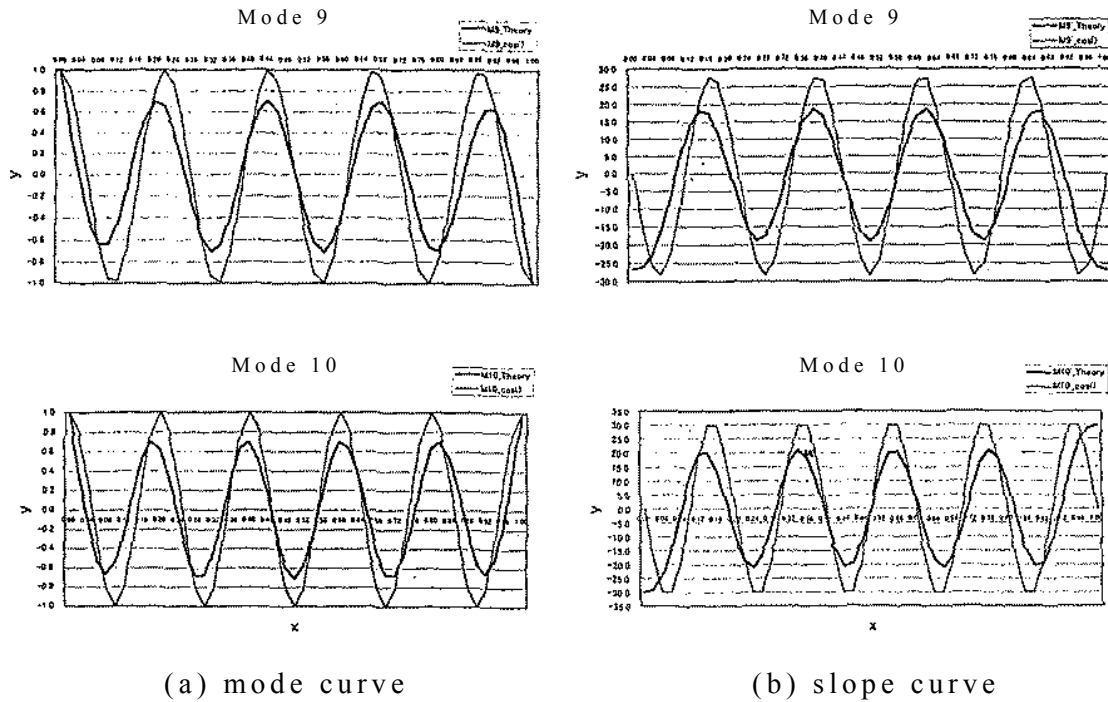


Fig.4.3.1 Comparison of mode curve in deflection and slope for uniform beam with $\cos \lambda_n$ and $\lambda_n \sin \lambda_n \xi$

この図から以下の特徴を見出すことができる。

- ・ たわみモードはビームの両端部を除き厳密解の方が小さくなる。
- ・ 傾斜角についてもビーム両端部で違いが大きく、かつ中央部では厳密解の方が小さくなる。端部付近における傾斜角の差は(4.2.1)式が端部条件（曲げモーメント=0，せん断力=0）を満足していないことによる。

このようにたわみ，傾斜角とも違いが見られるにもかかわらず(4.3.1)式を用いるのは厳密式が微小要素のつり合いに注目して導かれるのに対して，エネルギー法ではマクロなエネルギーのつり合いをとるため，すなわち全体最適化に力点が置かれることによるものと考えられる。

実船のように変断面，不均一荷重分布の場合，Fig.4.3.2に示すようにビーム中間部での変位はさらに小さくなり低次振動領域では端部変位の30%程度となる[36]。

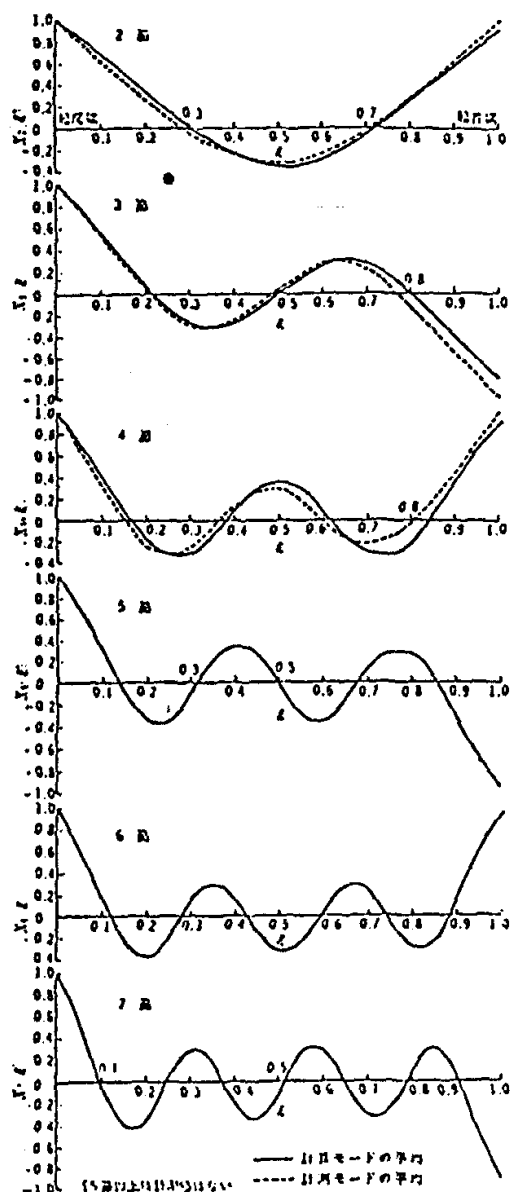


図8 計算モードの平均値と Johnson の計算モードの平均値との比較

Comparison of mean values of calculated and measured mode curves

(a) mode curve

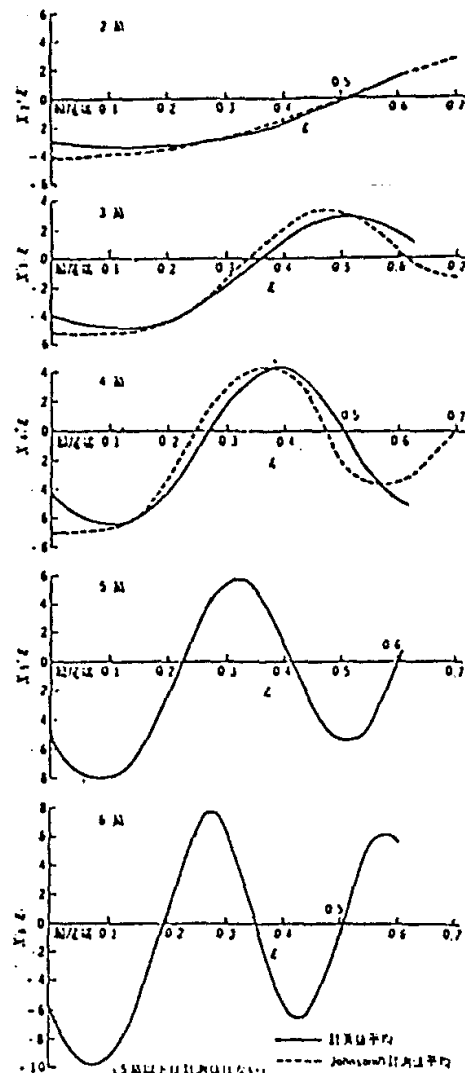


図10 モード曲線傾斜の計算値平均と Johnson の計算値平均との比較

Comparison of calculated and measured slopes of mode curves

(b) slope curve

Fig.4.3.2 Calculated mode and slope for actual ship[36]

変断面，不均一重量分布のビームに対して理論的厳密解を求めることが困難であることは前述したが，本研究の目的が計算に必要なデータが不足する初期計画段階において近似的にしる設計的判断に耐える精度の振動予測を行うことにあるので (4.3.1) を基本式とし，中間部における変位の減少と端部における変位のはね上がりを考慮できるように次式によって振動モードを仮定する。

$$X_n(\xi) = \cos \lambda_n \xi \left\{ \delta_1 + \delta_2 \left(e^{-\lambda_n \xi} + e^{\lambda_n (\xi-1)} \right) \right\} \quad (4.3.4)$$

4.3.2 船体固有振動数計算式

(4.3.4)式で与える振動たわみモードは曲げたわみとせん断たわみが合成されたものであるので次のように曲げとせん断のたわみモードを分離する。

曲げたわみ $X_{nb}(\xi)$

$$X_{nb}(\xi) = \cos \lambda_n \xi \{ \delta_{b1} + \delta_{b2} (e^{-\lambda_n \xi} + e^{\lambda_n (\xi-1)}) \} \quad (4.3.5)$$

せん断たわみ $X_{ns}(\xi)$

$$X_{ns}(\xi) = \cos \lambda_n \xi \{ \delta_{s1} + \delta_{s2} (e^{-\lambda_n \xi} + e^{\lambda_n (\xi-1)}) \} \quad (4.3.6)$$

ここで未定たわみ係数 $\delta_{b1}, \delta_{b2}, \delta_{s1}, \delta_{s2}$, (ともに [m] の次元を有する) はエネルギーの停留値より決定されることになる。

このとき, 曲げたわみとせん断たわみは同相で変化, すなわち

$$\delta_{b1} \delta_{s1} > 0 \quad (4.3.7)$$

を満足しなければならない。一方前述したように低次振動領域では中央部でのたわみの減少を生じるものの高次振動領域でその保証はないし物理的必然性もないので本研究では δ_{b2}, δ_{s2} について特に制限は設けない。付録 4.2 にたわみの基本形が (4.3.5) 式, (4.3.6) 式に示す $\cos \lambda_n \xi$ で与えられ, δ_{b1} と δ_{s1} が同相すなわち $\delta_{b1} \cdot \delta_{s1} > 0$ となる根拠を示す。

(1) 歪エネルギー

曲げ歪エネルギー U_b とせん断歪エネルギー U_s よりなり，各々次のように与えられる。

・ 曲げ歪エネルギー U_b

$$\begin{aligned} U_b &= \frac{EI}{2\ell^3} \int_0^1 f(\xi) \left(\frac{d^2 X_{nb}}{d\xi^2} \right)^2 d\xi \\ &= \frac{EI}{2\ell^3} \lambda_n^4 \left(\delta_{b1}^2 u_{11} + 2\delta_{b1}\delta_{b2} u_{12} + \delta_{b2}^2 u_{22} \right) \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

ここで u_{ij} は次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} u_{11} &= \int_0^1 f(\xi) \cos^2 \lambda_n \xi d\xi \\ u_{12} &= \int_0^1 f(\xi) \sin 2\lambda_n \xi \left(-e^{-\lambda_n \xi} + e^{\lambda_n(\xi-1)} \right) d\xi \\ u_{22} &= 4 \int_0^1 f(\xi) \sin^2 \lambda_n \xi \left(-e^{-\lambda_n \xi} + e^{\lambda_n(\xi-1)} \right)^2 d\xi \end{aligned} \right\} \quad (4.3.9)$$

ここで (4.3.9) 式で与える $f(\xi)$ は (4.2.7) 式の関係より次式で表される。

$$f(\xi) = 1 - \tilde{\beta} \left(e^{-\beta \xi} + e^{\beta(\xi-1)} \right) \quad (4.3.10)$$

・ せん断歪エネルギー U_s

$$\begin{aligned} U_s &= \frac{GA_w}{2\ell} \int_0^1 h(\xi) \left(\frac{dX_{ns}}{d\xi} \right)^2 d\xi \\ &= \frac{GA_w}{2\ell} \lambda_n^2 \left(\delta_{s1}^2 \bar{u}_{11} + 2\delta_{s1}\delta_{s2} \bar{u}_{12} + \delta_{s2}^2 \bar{u}_{22} \right) \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

ここで \bar{u}_{ij} は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_{11} &= \int_0^1 h(\xi) \sin^2 \lambda_n \xi d\xi \\ \bar{u}_{12} &= \int_0^1 h(\xi) \sin \lambda_n \xi \left\{ \sin \lambda_n \xi \left(e^{-\lambda_n \xi} + e^{\lambda_n (\xi-1)} \right) + \cos \lambda_n \xi \left(e^{-\lambda_n \xi} - e^{\lambda_n (\xi-1)} \right) \right\} d\xi \\ \bar{u}_{22} &= \int_0^1 h(\xi) \left\{ \sin \lambda_n \xi \left(e^{-\lambda_n \xi} + e^{\lambda_n (\xi-1)} \right) + \cos \lambda_n \xi \left(e^{-\lambda_n \xi} - e^{\lambda_n (\xi-1)} \right) \right\}^2 d\xi \end{aligned} \right\} \quad (4.3.12)$$

ここで (4.3.12) 式に示す $h(\xi)$ は (4.2.8) 式に示すもので次式のとおりである。

$$h(\xi) = 1 - \tilde{\kappa} \left(e^{-\kappa \xi} + e^{\kappa (\xi-1)} \right) \quad (4.3.13)$$

(2) 運動エネルギー

運動エネルギーには船体の上下方向運動エネルギーと回転による運動エネルギーが存在する。このうち回転による運動エネルギーには付加質量による効果が入らないため、上下方向運動エネルギーと比較すると非常に小さな値となる。目的が近似的計算であるからこの微小項は無視し上下方向運動エネルギーのみ考慮するものとする。円振動数を ω としたときの運動エネルギー T は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} T &= -\omega^2 \frac{w\ell}{g} \int_0^1 g(\xi) \{ X_{nb}(\xi) + X_{ns}(\xi) \}^2 d\xi \\ &= -\omega^2 \frac{w\ell}{2g} \left\{ (\delta_{b1} + \delta_{s1})^2 t_{11} + 2(\delta_{b1} + \delta_{s1})(\delta_{b2} + \delta_{s2}) t_{12} + (\delta_{b2} + \delta_{s2})^2 t_{22} \right\} \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

(4.3.14) 式に示す t_{ij} は次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} t_{11} &= \int_0^1 g(\xi) \cos^2 \lambda_n \xi d\xi \\ t_{12} &= \int_0^1 g(\xi) \cos^2 \lambda_n \xi \left(e^{-\lambda_n \xi} + e^{\lambda_n (\xi-1)} \right) d\xi \\ t_{22} &= \int_0^1 g(\xi) \cos^2 \lambda_n \xi \left(e^{-\lambda_n \xi} + e^{\lambda_n (\xi-1)} \right)^2 d\xi \end{aligned} \right\} \quad (4.3.15)$$

(4.3.15)式中の $g(\xi)$ は (4.2.9)式に示すものと対応して

$$g(\xi)=1-\tilde{\gamma}(e^{-\gamma\xi}+e^{\gamma(\xi-1)}) \quad (4.3.16)$$

で与えられる。付加質量（重量）を含めて決定するものであり，
(4.3.14)式の w も船体重量と付加質量(重量)を含めたものである。

(3) 固有振動数の計算

歪エネルギー U_b, U_s と運動エネルギー T の和

$$K=U_b+U_s+T \quad (4.3.17)$$

を $\delta_{b1}, \delta_{b2}, \delta_{s1}, \delta_{s2}$ 各々を変数として停留値をとる。
今

$$\left. \begin{aligned} \omega_b^2 &= \frac{\lambda_n^4}{\ell^4} \cdot \frac{gEI}{w} \\ \omega_s^2 &= \frac{\lambda_n^2}{\ell^2} \cdot \frac{gGA_w}{w} \end{aligned} \right\} \quad (4.3.18)$$

とおき，停留式をマトリクス表示すると次の関係式を得る。

$$\left[\begin{array}{cccc} \left(\frac{\omega_b}{\omega}\right)^2 u_{11} - t_{11} & \left(\frac{\omega_b}{\omega}\right)^2 u_{12} - t_{12} & -t_{11} & -t_{12} \\ \left(\frac{\omega_b}{\omega}\right)^2 u_{12} - t_{12} & \left(\frac{\omega_b}{\omega}\right)^2 u_{22} - t_{22} & -t_{12} & -t_{22} \\ -t_{11} & -t_{12} & \left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2 \bar{u}_{11} - t_{11} & \left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2 \bar{u}_{12} - t_{12} \\ -t_{12} & -t_{22} & \left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2 \bar{u}_{12} - t_{12} & \left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2 \bar{u}_{22} - t_{22} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \delta_{b1} \\ \delta_{b2} \\ \delta_{s1} \\ \delta_{s2} \end{array} \right\} = 0 \quad (4.3.19)$$

(4.3.19)式において $\delta_{b1}, \delta_{b2}, \delta_{s1}, \delta_{s2}$ が全て 0 となる以外の解を得るには (4.3.19)式の 4 行 4 列のマトリクスの行列式が 0 となる必要がある。行列式 = 0 を満足する ω^2 は 4 個得られることになるが， ω^2 の最小値が固有円振動数 ω を与えることになる。

4.4 固有振動数計算の簡易化

4.3 節の方法による固有振動数計算では未知係数が 4 個存在し、振動応答を計算する場合、全体の見通しがつきにくい。このためこの 4 個の未定係数を 1 個とする方法について検討を行い、二重底や上部構造との連成振動を検討するとき主船体が連成振動におよぼす影響を算式として見えるものにする。

計算式の導出に当たっては以下を仮定する。

- ・ δ_{b1} と δ_{b2} の間の関係は曲げ振動のみを考えることにより決定する。
- ・ δ_{s1} と δ_{s2} の関係も同様にせん断振動で決定する。
- ・ δ_{b1} と δ_{s1} の関係は n 節振動の固有振動数 ω_n を介して明らかにする。

4.4.1 曲げ振動系におけるたわみ係数比 η_{nb} の決定

曲げたわみ $X_{nb}(\xi)$ は (4.3.5) 式より次のように表される。

$$X_{nb}(\xi) = \cos \lambda_n \xi \left\{ \delta_{b1} + \delta_{b2} \left(e^{-\lambda_n \xi} + e^{\lambda_n (\xi-1)} \right) \right\} \quad (4.4.1)$$

歪エネルギー U_b は (4.3.8) 式と同様に

$$U_b = \frac{EI}{2\ell^3} \lambda_n^4 \left(\delta_{b1}^2 u_{11} + 2\delta_{b1}\delta_{b2} u_{12} + \delta_{b2}^2 u_{22} \right) \quad (4.4.2)$$

として与えられ, u_{ij} は (4.3.9) 式と同じく, 次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} u_{11} &= \int_0^1 f(\xi) \cos^2 \lambda_n \xi d\xi \\ u_{12} &= \int_0^1 f(\xi) \sin 2\lambda_n \xi \left(-e^{-\lambda_n \xi} + e^{\lambda_n (\xi-1)} \right) d\xi \\ u_{22} &= 4 \int_0^1 f(\xi) \sin^2 \lambda_n \xi \left(-e^{-\lambda_n \xi} + e^{\lambda_n (\xi-1)} \right)^2 d\xi \end{aligned} \right\} \quad (4.4.3)$$

運動エネルギー T_b は (4.3.14) 式, (4.3.15) 式より次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} T_b &= -\omega^2 \frac{W\ell}{2g} \left\{ \delta_{b1}^2 t_{11} + 2\delta_{b1}\delta_{b2} t_{12} + \delta_{b2}^2 t_{22} \right\} \\ t_{11} &= \int_0^1 g(\xi) \cos^2 \lambda_n \xi d\xi \\ t_{12} &= \int_0^1 g(\xi) \cos^2 \lambda_n \xi \left(e^{-\lambda_n \xi} + e^{\lambda_n (\xi-1)} \right) d\xi \\ t_{22} &= \int_0^1 g(\xi) \cos^2 \lambda_n \xi \left(e^{-\lambda_n \xi} + e^{\lambda_n (\xi-1)} \right)^2 d\xi \end{aligned} \right\} \quad (4.4.4)$$

今

$$K_b = U_b + T_b \quad (4.4.5)$$

とおき δ_{b1}, δ_{b2} に対して停留値をとると次のようなマトリクス形式で表示できる。

$$\begin{bmatrix} \omega_b^2 u_{11} - \omega_n^2 t_{11} & \omega_b^2 u_{12} - \omega_n^2 t_{12} \\ \omega_b^2 u_{12} - \omega_n^2 t_{12} & \omega_b^2 u_{22} - \omega_n^2 t_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{b1} \\ u_{b2} \end{Bmatrix} = 0 \quad (4.4.6)$$

ここで ω_b^2 は次式を意味する。

$$\omega_b^2 = \frac{\lambda_n^4}{\ell^4} \cdot \frac{gEI}{w} \quad (4.4.7)$$

(4.4.6)式において $\delta_{b1}=0, \delta_{b2}=0$ 以外の解をとるためには次の関係を満足しなければならない。

$$\left. \begin{aligned} a_b \omega_n^4 - 2b_b \omega_n^2 \omega_b^2 + c_b \omega_b^4 &= 0 \\ a_b &= t_{11} t_{22} - t_{12}^2 \\ b_b &= \frac{1}{2} (t_{11} u_{22} + t_{22} u_{11} - 2t_{12} u_{12}) \\ c_b &= u_{11} u_{22} - u_{12}^2 \end{aligned} \right\} \quad (4.4.8)$$

(4.4.8)式より ω_n^2 は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \omega_n^2 &= c_{nb} \cdot \omega_b^2 \\ c_{nb} &= \frac{b_b - \sqrt{b_b^2 - a_b c_b}}{a_b} \end{aligned} \right\} \quad (4.4.9)$$

今

$$\eta_{nb} = \frac{\delta_{b2}}{\delta_{b1}} \quad (4.4.10)$$

とおけば，これを (4.4.6)式に代入することにより η_{nb} は次の関係式を満たす。

$$\eta_{nb} = \frac{u_{11} - c_{nb} t_{11}}{c_{nb} t_{12} - u_{12}} \quad (4.4.11)$$

この η_{nb} は振動節数 n によって変化する。

4.4.2 セン断振動系におけるたわみ係数比 η_{ns} の決定

いま次の関係

$$\eta_{ns} = \frac{\delta_{s2}}{\delta_{s1}} \quad (4.4.12)$$

を定義したとき 4.3 節で示した関係式を用いて，曲げたわみと同様な方法で η_{ns} は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \eta_{ns} &= \frac{\bar{u}_{11} - c_{ns} t_{11}}{c_{ns} t_{12} - \bar{u}_{12}} \\ c_{ns} &= \frac{b_s - \sqrt{b_s^2 - a_s c_s}}{a_s} \\ a_s &= t_{11} t_{22} - t_{12}^2 \\ b_s &= \frac{1}{2} (t_{11} \bar{u}_{22} + t_{22} \bar{u}_{11} - 2 t_{12} \bar{u}_{12}) \\ c_s &= \bar{u}_{11} \bar{u}_{22} - \bar{u}_{12}^2 \end{aligned} \right\} \quad (4.4.13)$$

ここで \bar{u}_{ij} は (4.3.12) 式を用いている。

4.4.3 固有振動数の計算

(4.4.11)式および (4.4.13)式により η_{nb}, η_{ns} が求められるので曲げたわみ $X_{nb}(\xi)$, せん断たわみ $X_{ns}(\xi)$ は各々次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} X_{nb}(\xi) &= \delta_b \cos \lambda_n \xi \cdot \Gamma_{nb}(\xi) \\ X_{ns}(\xi) &= \delta_s \cos \lambda_n \xi \cdot \Gamma_{ns}(\xi) \end{aligned} \right\} \quad (4.4.14)$$

ここで $\Gamma_{nb}(\xi), \Gamma_{ns}(\xi)$ は確定値 η_{nb}, η_{ns} を含んだ次式である。

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{nb}(\xi) &= 1 + \eta_{nb} \left(e^{-\lambda_n \xi} + e^{\lambda_n (\xi-1)} \right) \\ \Gamma_{ns}(\xi) &= 1 + \eta_{ns} \left(e^{-\lambda_n \xi} + e^{\lambda_n (\xi-1)} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.4.15)$$

このとき曲げ歪エネルギー U_b , せん断歪エネルギー U_s , 運動エネルギー T は各々次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} U_b &= \frac{EI}{2\ell^3} \lambda_n^4 \delta_b^2 u_b \\ U_s &= \frac{GA_w}{2\ell} \lambda_n^2 \delta_s^2 u_s \\ T &= -\omega^2 \frac{w\ell}{2g} \left(\delta_b^2 \tilde{t}_{11} + 2\delta_b \delta_s \tilde{t}_{12} + \delta_s^2 \tilde{t}_{22} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.4.16)$$

(4.4.16)式中の u_b, u_s は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} u_b &= \int_0^1 f(\xi) \tilde{\Gamma}_{nb}(\xi)^2 d\xi \\ u_s &= \int_0^1 f(\xi) \tilde{\Gamma}_{ns}(\xi)^2 d\xi \end{aligned} \right\} \quad (4.4.17)$$

ここで $\tilde{\Gamma}_{nb}(\xi), \tilde{\Gamma}_{ns}(\xi)$ は次の関数を意味する。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{nb}(\xi) &= \cos \lambda_n \xi + 2\eta_{nb} \sin \lambda_n \xi \left(-e^{-\lambda_n \xi} + e^{\lambda_n (\xi-1)} \right) \\ \tilde{\Gamma}_{ns}(\xi) &= -\sin \lambda_n \xi + \eta_{ns} \left\{ \cos \lambda_n \xi \left(-e^{-\lambda_n \xi} + e^{\lambda_n (\xi-1)} \right) - \sin \lambda_n \xi \left(e^{-\lambda_n \xi} + e^{\lambda_n (\xi-1)} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4.4.18)$$

また (4.4.16) 式の \tilde{t}_{ij} は (4.4.15)式の関係を用いて次のように与え

られる。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{t}_{11} &= \int_0^1 g(\xi) \cos^2 \lambda_n \xi \cdot \Gamma_{nb}(\xi)^2 d\xi \\ \tilde{t}_{12} &= \int_0^1 g(\xi) \cos^2 \lambda_n \xi \cdot \Gamma_{nb}(\xi) \Gamma_{ns}(\xi) d\xi \\ \tilde{t}_{22} &= \int_0^1 g(\xi) \cos^2 \lambda_n \xi \cdot \Gamma_{ns}^2(\xi) d\xi \end{aligned} \right\} \quad (4.4.19)$$

今無次元量 α を次のように定義する。

$$\alpha = \frac{EI}{GA_w \ell^2} \quad (\text{無次元量}) \quad (4.4.20)$$

合計エネルギー K を

$$K = U_b + U_s + T \quad (4.4.21)$$

と定義し，これの δ_{b1}, δ_{b2} に対する停留値をとることにより次のマトリクス表示式が得られる。

$$\left[\begin{array}{cc} \omega_b^2 u_b - \omega_n^2 \tilde{t}_{11} & -\omega_n^2 \tilde{t}_{12} \\ -\omega_n^2 \tilde{t}_{12} & \frac{\omega_b^2}{\alpha \lambda_n^2} u_s - \omega_n^2 \tilde{t}_{22} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \delta_b \\ \delta_s \end{array} \right\} = 0 \quad (4.4.22)$$

δ_b, δ_s が同時に 0 とならない (4.4.22) 式の解は次のように導かれる。

$$\left. \begin{aligned} \omega_n^2 &= \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A} \\ A &= \tilde{t}_{11} \tilde{t}_{22} - \tilde{t}_{12}^2 \\ B &= \frac{1}{2} \left(u_b \tilde{t}_{22} + \frac{u_s \tilde{t}_{11}}{\alpha \lambda_n^2} \right) \\ C &= \frac{u_b u_s}{\alpha \lambda_n^2} \end{aligned} \right\} \quad (4.4.23)$$

A, B, C とも確定値であり (4.4.23) 式により ω_n は決定される。

(4.4.23) 式により ω_n^2 が確定できるので (4.4.22) 式より δ_s は δ_b に関して次のように与えることができる。

$$\delta_s = \left(\frac{\omega_b^2}{\omega_n^2} \cdot \frac{u_b}{\tilde{t}_{12}} - \frac{\tilde{t}_{11}}{\tilde{t}_{12}} \right) \delta_b = \zeta_n \cdot \delta_b \quad (4.4.24)$$

(4.4.24)式の δ_b に対する係数 $\frac{\omega_b^2}{\omega_n^2} \cdot \frac{u_b}{\tilde{t}_{12}} - \frac{\tilde{t}_{11}}{\tilde{t}_{12}}$ は節数毎に確定した数値をとるので，結局 δ_b のみを未定係数として主船体振動を表現できることになる。

$$\zeta_n = \frac{\omega_b^2}{\omega_n^2} \cdot \frac{u_b}{\tilde{t}_{12}} - \frac{\tilde{t}_{11}}{\tilde{t}_{12}}$$

をせん断変形感度係数と称することとする。

4.5 数値計算による精度検証

提案する方法による船体固有振動数推定精度を調査するために，主船体の変断面効果を考慮して剛性分布させたビームにモデル化し，有限要素法（MSC/NASTRAN）による数値計算を行い，提案する計算法による推定値との比較を行った。

有限要素法による数値解析は次の２種類に対して行った。

- ・ Case-1 荷重や剛性を 4.2 節による方法で関数分布させた場合
これは有限要素法を用いれば，両端における境界条件を完全に満足するため，端部条件を完全には満足していない提案する近似推定法との比較を試みるためである。
- ・ Case-2 荷重や剛性の分布を現実の分布とした場合
これは荷重，剛性を忠実に反映しており，現実を生じる推動に最も近い値と期待されるためである。

一方提案する近似計算法として次の２種類の計算を行った。

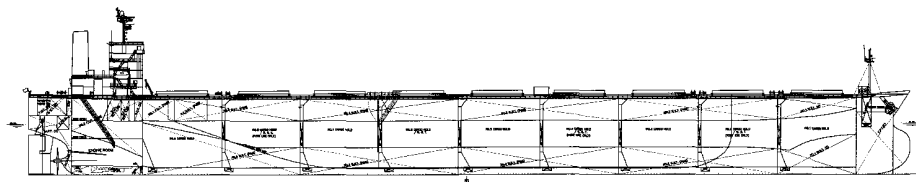
- ・ Case-3 4.3 節の方法。すなわち未知たわみ $\delta_{b1}, \delta_{b2}, \delta_{s1}, \delta_{s2}$ 4 個の自由度を有する近似推定法。
- ・ Case-4 4.4 節の方法。すなわち未知たわみ δ_{b1} 1 個に迄近似を進めた方法。

計算は Table 4.3.1 に示す 3 種類の船舶，ケープサイズバルクキャリアー，アフラマックスタンカーおよび小型ガス船であり第 3 章で数値的実証を行ったものと同一である。

Table 4.5.1 Principal dimension of ships for vibration estimation

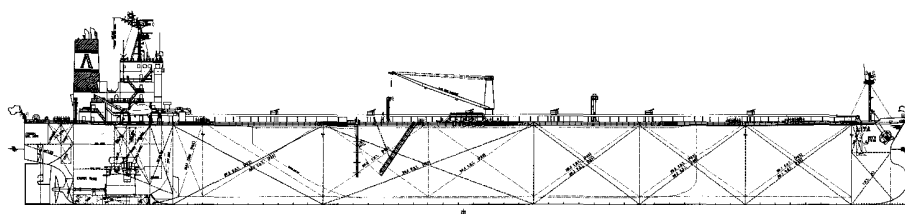
Ship type		Cape size B.C.	Afra max T.	Gas carrier
	L(m):Ship length	279.00	232.00	148.00
	B(m):Breadth	45.00	42.00	25.00
	D(m):Depth	24.40	21.20	16.50
	d(m):Draft (ballast cond.)	7.63	7.21	6.40

Fig.4.5.1 にケープサイズバルクキャリアー， Fig.4.5.2 にアフラマックスタンカーそして Fig.4.5.3 にガス船の形状， 配置図を示す。



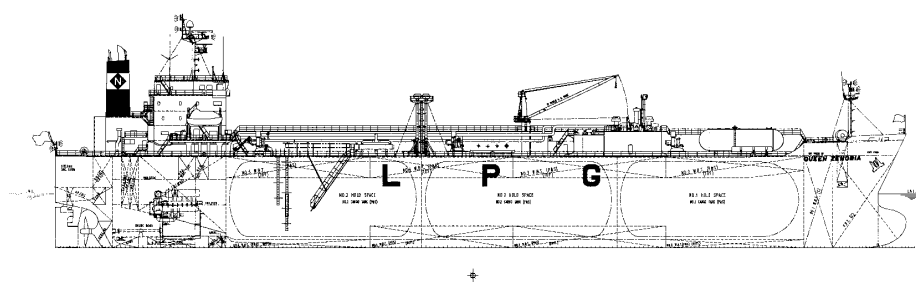
$$L \times B \times D = 279.0\text{m} \times 45.0\text{m} \times 24.4\text{m}$$

Fig.4.5.1 General arrangement of Cape size bulk carrier



$$L \times B \times D = 232.0\text{m} \times 42.0\text{m} \times 21.2\text{m}$$

Fig.4.5.2 General arrangement of Aframax tanker



$$L \times B \times D = 148.0\text{m} \times 25.0\text{m} \times 16.5\text{m}$$

Fig.4.5.3 General arrangement of Gas carrier

4.5.1 剛性，荷重および付加質量の関数分布

剛性および荷重分布は船の長さ方向に不均等に分布するばかりでなく，その変化は階段状に変化する。このような分布は設計がかなり進んだ段階でしか明らかにならず，このため振動予測計算は設計も詳細に入った段階でしか実施できず，データ作成にも多くの手間，時間を要していた。

提案する近似計算法では剛性や荷重の凹凸をならしたなめらかな関数近似によりおき換えようとするものである。このような実船の剛性や荷重分布のデータを蓄積していけばそれから比較的近い関数式を選び出すことができるようになり，詳細なデータを集めるまで振動検討を遅らせる必要もないし計算自体を簡素化できる。前述した 3 種類の船舶に対して曲げ剛性 EI ，せん断剛性 GA_w ，および荷重分布とその関数分布について検討した。その比較を Fig.4.5.4，Fig.4.5.5 および Fig.4.5.6 に示す。またこれら 3 隻の船の係数項を Table 4.5.2 に一括して与える。船の種類によって数字は異なるが，実績船の分布に関するデータベースを作っておけば以降の検討は迅速化される。係数項は 4.2.2 項で与えた (4.2.7)～(4.2.9) 式中に示すもので再記すると以下の $\tilde{\beta}, \beta, \tilde{\kappa}, \kappa, \tilde{\gamma}, \gamma$ の 6 個である。

曲げ剛性 $EI(\xi)$

$$EI(\xi) = EI \left\{ 1 - \tilde{\beta} \left(e^{-\beta\xi} + e^{\beta(\xi-1)} \right) \right\} \quad (4.5.1)$$

せん断剛性 $GA_w(\xi)$

$$GA_w(\xi) = GA_w \left\{ 1 - \tilde{\kappa} \left(e^{-\kappa\xi} + e^{\kappa(\xi-1)} \right) \right\} \quad (4.5.2)$$

荷重 $w(\xi)$

$$w(\xi) = w \left\{ 1 - \tilde{\gamma} \left(e^{-\gamma\xi} + e^{\gamma(\xi-1)} \right) \right\} \quad (4.5.3)$$

Fig.4.5.4，Fig.4.5.5 および Fig.4.5.6 に前述した 3 種類の船舶の曲げ剛性 EI ，せん断剛性 GA_w ，荷重 w の実際の分布とそれらの関数表示曲線との比較を示す。Table 4.5.2 には (4.5.1)式～(4.5.3) 式に

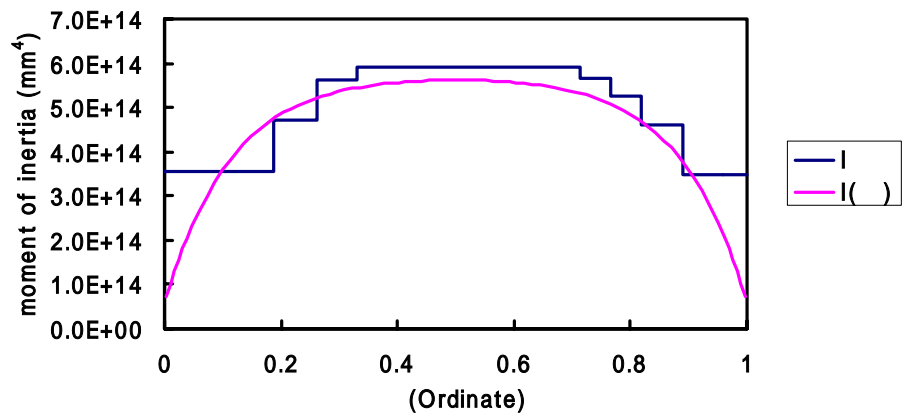
示した係数項の各船に与えた数値をまとめて与える。

Table 4.5.2 Coefficient given ships types

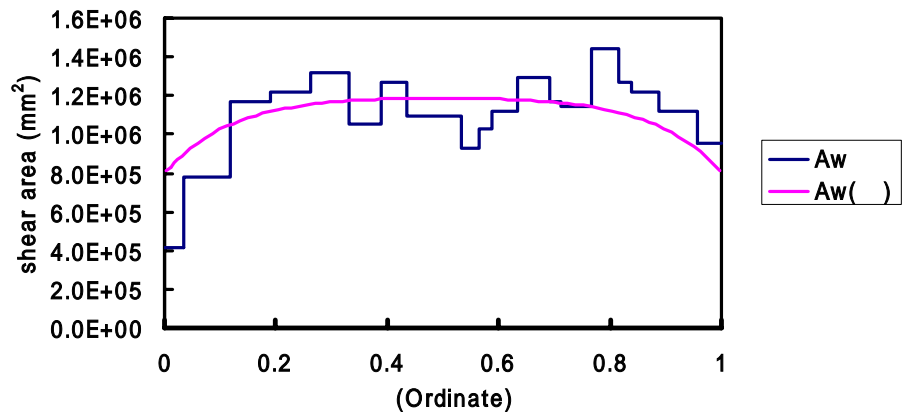
		Cape size B.C.	Afra max T.	Gas carrier
Bending rigidity $EI(\xi)$	$\tilde{\beta}$	0.900	0.296	0.412
	β	8.79	6.31	7.12
Shear rigidity $GA_w(\xi)$	$\tilde{\kappa}$	0.333	0.379	0.178
	κ	8.32	5.89	4.29
Weight distribution $w(\xi)$	$\tilde{\gamma}$	0.333	0.740	0.591
	γ	8.83	8.90	8.38

付加質量については 3 章で得た船底に垂直方向の速度が幅方向に均一に分布する場合の主船体節数による分布の違いを各船ごとにまとめ Fig.4.5.7 に示す。

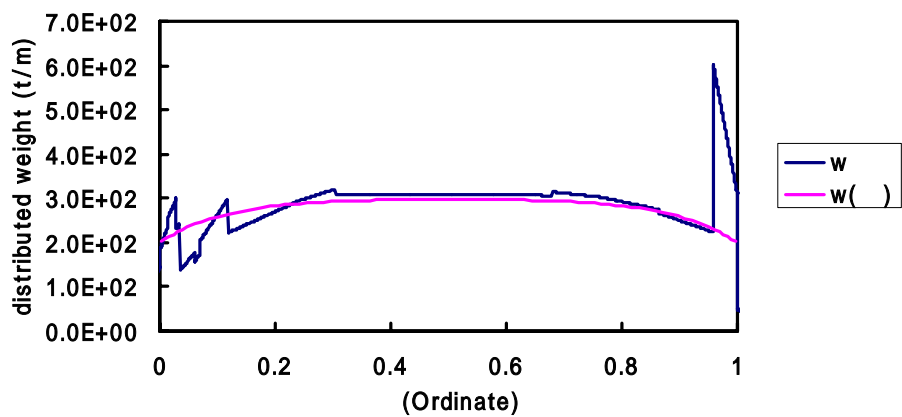
船体に働く分布質量は船体上の分布重量と振動節数ごとに異なる付加質量分布を質量単位に統一して加え合わせることになるため、振動節数ごとに新たな係数値がパーソナルコンピュータ中で生成される。



(a) Actual and functional distribution for moment of inertia (I)

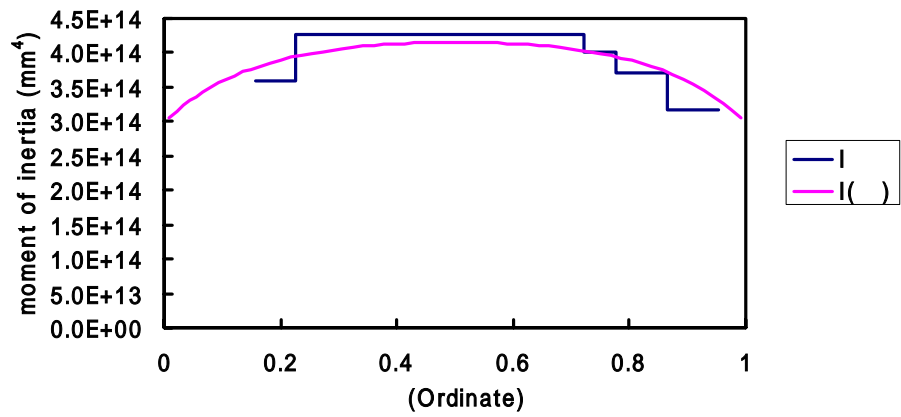


(b) Actual and functional distribution for shear area (Aw)

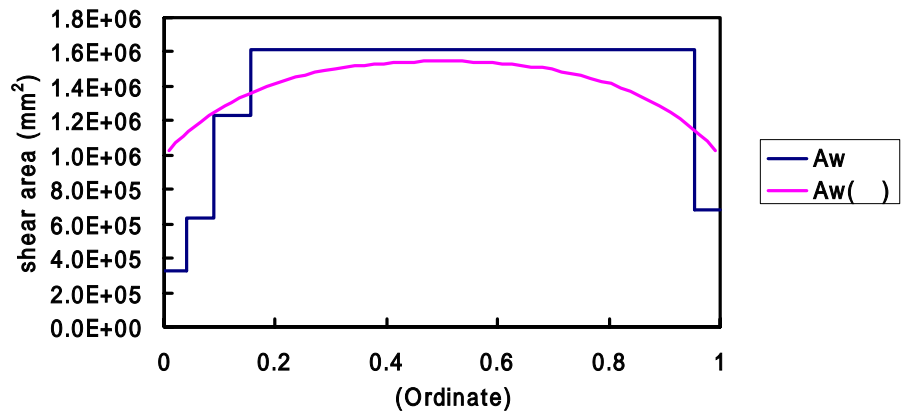


(c) Actual and functional distribution for ship's weight (w)

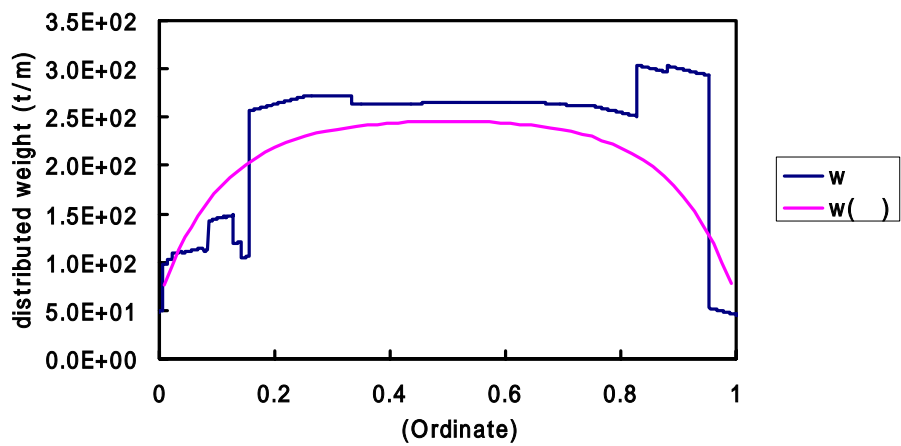
Fig.4.5.4 Actual and functional distribution of I, Aw and w for Cape size bulk carrier



(a) Actual and functional distribution for moment of inertia (I)

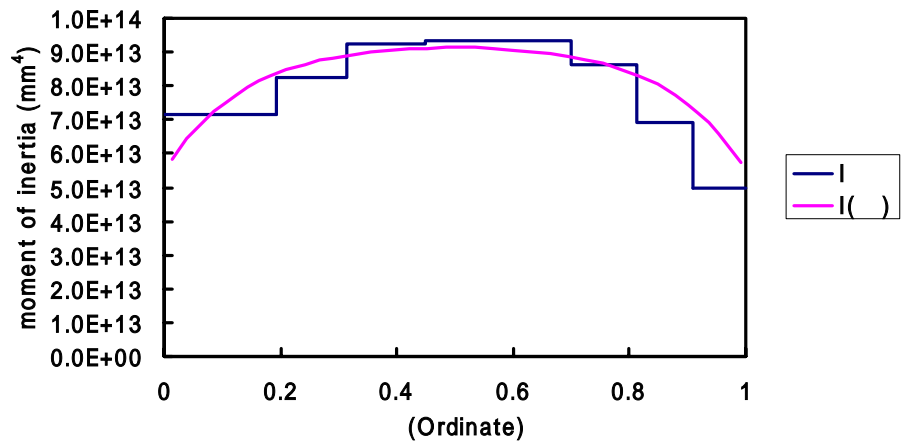


(b) Actual and functional distribution for shear area (A_w)

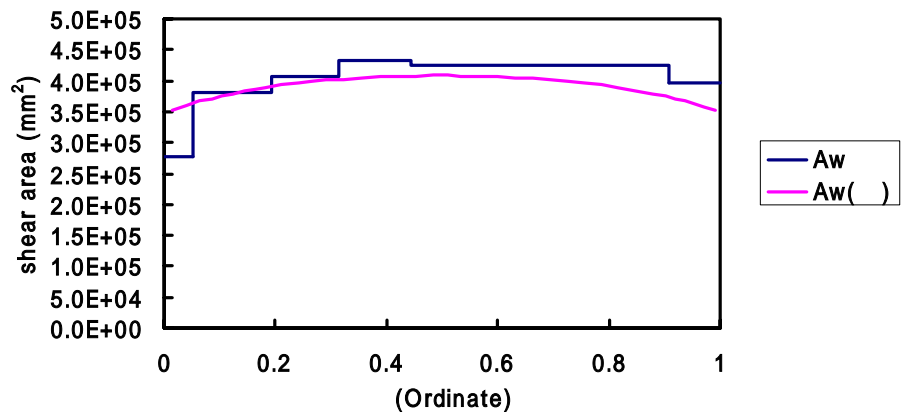


(c) Actual and functional distribution for ship's weight (w)

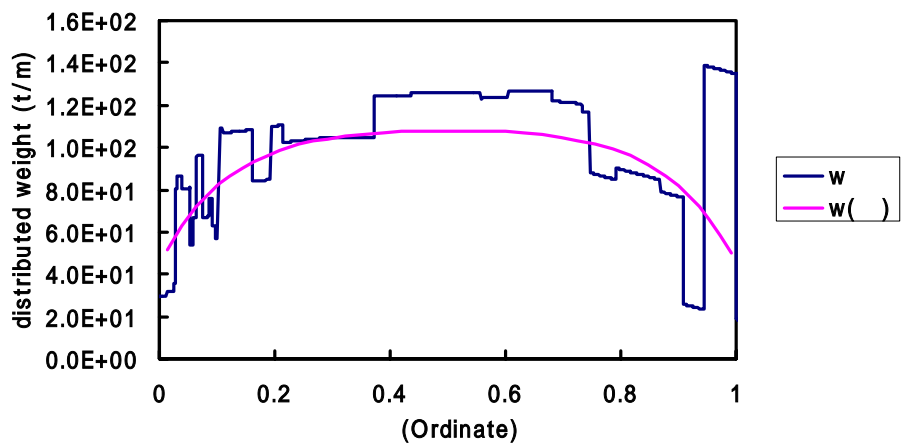
Fig.4.5.5 Actual and functional distribution of I, A_w and w for Afra max. tanker



(a) Actual and functional distribution for moment of inertia (I)

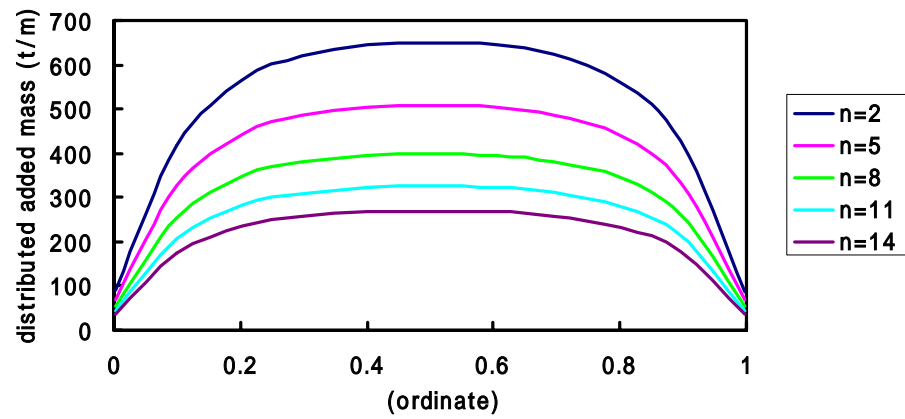


(b) Actual and functional distribution for shear area (Aw)

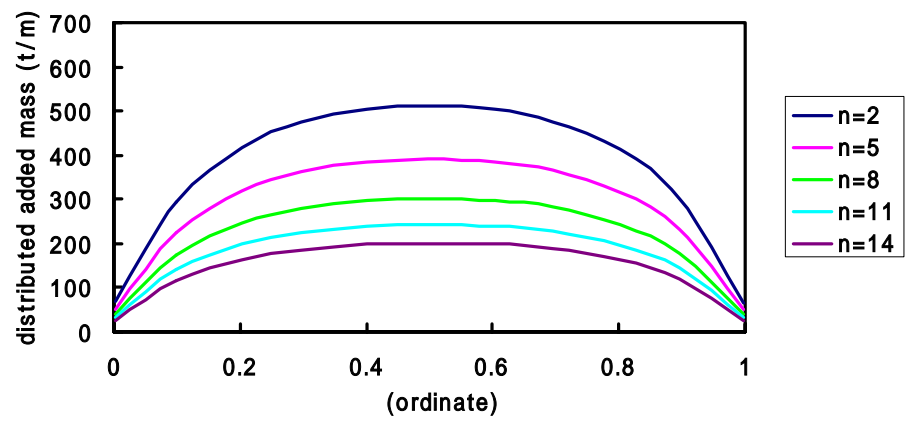


(c) Actual and functional distribution for ship's weight (w)

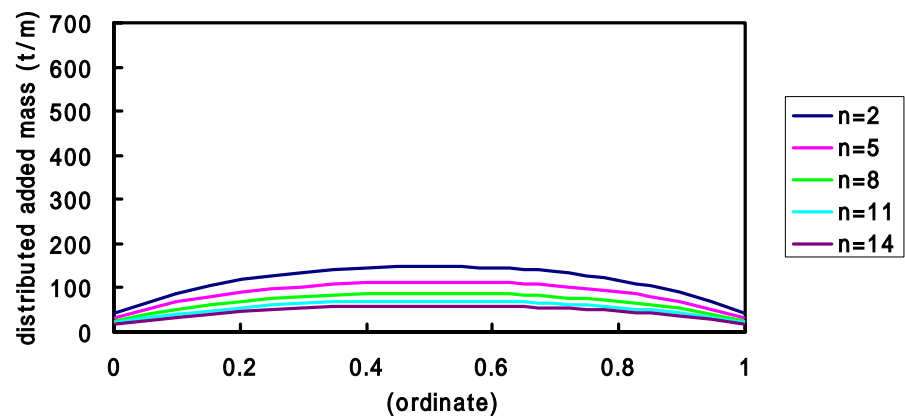
Fig.4.5.6 Actual and functional distribution of I, Aw and w for Gas carrier



(a) Cape size bulk carrier



(b) Afra max. tanker



(c) Gas carrier

Fig.4.5.7 Distribution of added mass for each model
number of hull vibration

4.5.2 数値計算

計算結果を Fig.4.5.8, Fig.4.5.9, Fig.4.5.10 に各船型ごとに示す。有限要素法によるビームの数値計算は剛性分布，重量分布を前項 4.5.1 に示す関数分布と実船分布のまま，すなわち階段状分布の 2 ケース（Case-1,2）について行った。これらを提案する簡易計算法（Case-3,4）と比較する。なお参考のために熊井による計算法 [9] による結果も併せて示した。熊井の方法は付加質量の三次元修正がなされていないため，高次振動領域で質量を過大評価するため振動数は低目に与えられる。

Fig.4.5.8～Fig.4.5.10 に示すとおり，提案する計算法による結果は有限要素法による結果とよい一致を示す。ただし Case-4 すなわち未知係数を 1 個にした場合については幾分高めの振動数を与えるが，実用上は十分の精度で振動を推定しており，二重底構造や上部構造との連成振動計算に採用することが可能である。

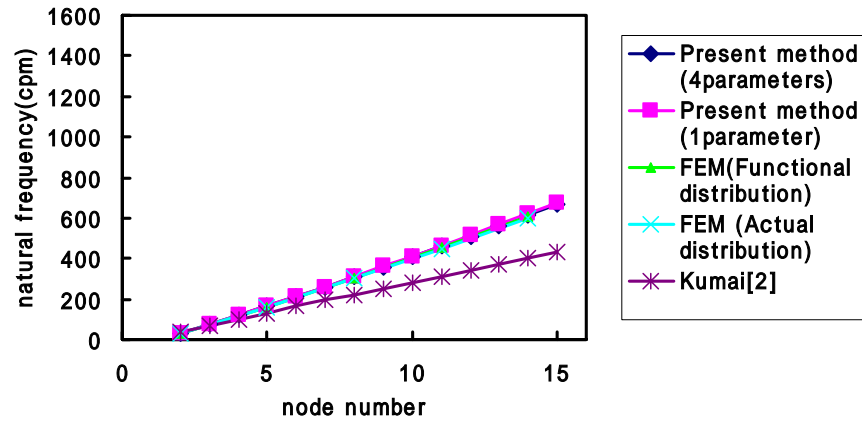


Fig.4.5.8 Comparison of natural frequencies for hull girder vibration
(Cape size bulk carrier)

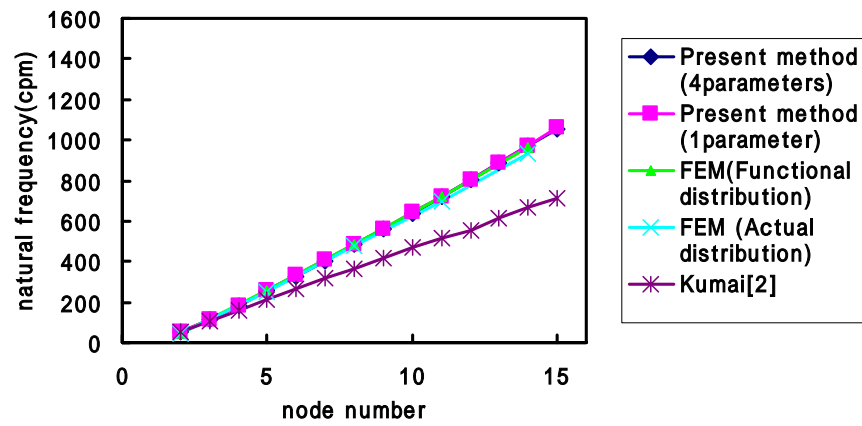


Fig.4.5.9 Comparison of natural frequencies for hull girder vibration
(Aframax tanker)

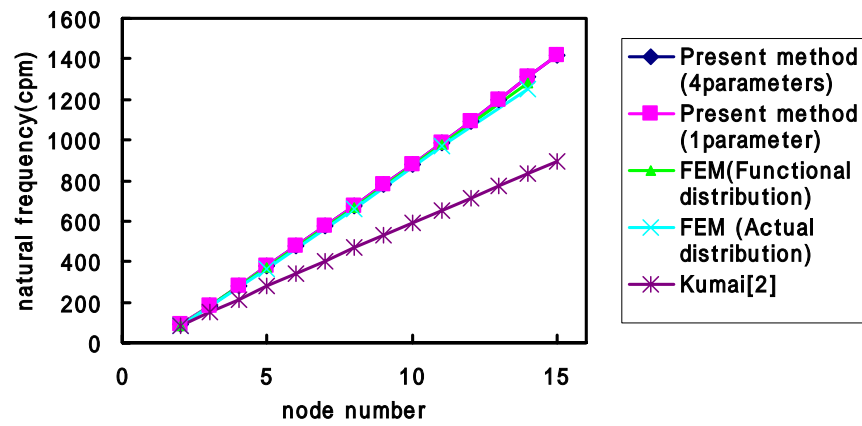


Fig.4.5.10 Comparison of natural frequencies for hull girder vibration
(Gas carrier)

4.5 結言

4 章においては上部構造や二重底構造等との連成において重要な役割をはたす主船体の振動予測法について考察した。

主船体振動の予測を有限要素法を用いて行うことは、膨大なデータの準備を厭わなければ比較的簡単である。しかし例えば上部構造との連成を考えた場合、何がどのように効いているのかいないのかを判断することは困難であり、計算の成果を生かすことは難しい。ここに問題を数理的に解くポイントが存在する。しかしパラメータの数を限定しないとやはり有限要素法と同じジレンマに陥ることになる。

4.2 節においては主船体形状を前後対称形と仮定し、中央断面係数 C_m 、水線面形状 C_w 、方形係数 C_b と主船体主寸法より船体形状特性を表す方法について論述した。特に主船体振動で重要なパラメータとなる付加質量の計算に必要な船の半幅分布 $b(\xi)$ 、没水断面積分布（半幅あたり） $S(\xi)$ の簡単な推定法を導くと同時に断面剛性や荷重分布の関数推定式の導出を試みた。

4.3 節においては剛性や、重量が船の長さ方向に変化する変断面体である主船体の振動をエネルギー法を用いて解く方法について論述した。

主船体の振動は曲げと剪断変形の合成されたものであり、振動によるたわみは中央部で小さく船首尾端で大きくなる傾向を有する。このことを考慮して 4 個の未知のたわみ係数を用いた関数式を導き、エネルギーの停留値をとることにより主船体の固有振動数を計算する方法を導いた。

4.4 節においてはパラメータ数をさらに減少させて 1 個とする方法について言及した。これは他との連成振動を考える場合にパラメータ数が多いと個々のパラメータが及ぼす影響があいまいになることをさけるためである。

4.5 節においては 4.3 節における 4 パラメータによる方法と 4.4 節による 1 パラメータによる方法については有限要素法による数値解析結果と比較を試みることにより推定精度を検証した。

まず 4 パラメータと 1 パラメータによる方法であるが，両者ほとんど一致（厳密には 1 パラメータが固有振動数においてわずかに大きい）した結果を与えることがわかった。

このことから 1 パラメータの有効性を実証した。

また有限要素法との比較であるが今回構築した計算法はいずれも有限要素法の結果と非常によい精度で一致しており，十分の実用性を有することを確認した。

第 5 章

二重底構造の振動予測法

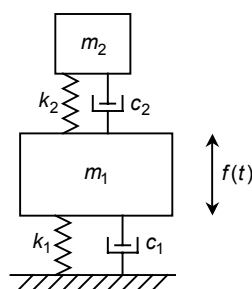
5.1 序言

5.1.1 概要

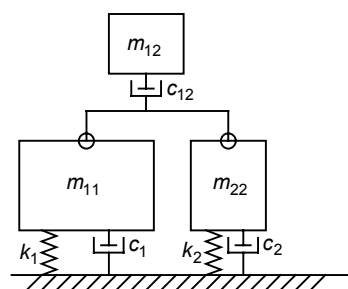
バルクキャリアーのような二重底構造を有する船舶の船体振動は二重底や船側構造の振動と連成するといわれている。

一般に連成振動は Fig.5.1.1(a) に例として示す二質点－二バネ系のように運動エネルギーにも，また歪エネルギーにも両者が影響し合うときに顕著に表れる。

主船体と二重底構造を考えた場合，主船体と二重底構造の歪エネルギーは各々独立であり，慣性項すなわち運動エネルギーについて連成効果が生じる。これをモデル化すると Fig.5.1.1(b) のように与えることができるであろう。弱い連成効果とも言い換えることができる。



(a) Vibration model having strong coupling effect



(b) Vibration model having weak coupling effect

Fig.5.1.1 Comparison of vibration models

しかし，主機の二次アンバランスモーメントに対する船体 5，6 節振動への二重底構造の連成影響や主船体の高次振動領域における二重底面外振動の影響について報告されている [29] [30] にもかかわらず，連成効果をもたらす原因については明確でないが、第 3 章において記述したように付加質量およびそれらから発生する流体減衰力に連成成分が存在することが連成発生の原因となっていることも予想される。このことを検証するために本章では二

重底構造の面外振動について検討することとする。

5.2 では実船に採用されている二重底構造を直交異方性板にモデル化する方法について記述する。実船の二重底構造は船底と内底板の間に縦桁と横桁が離散的に配置された Fig.5.1.2 に示すようなサンドイッチ構造方式であり、船側部にビルジホッパと称する構造が配置され、二重底構造の面外変形を拘束する大きなねじり剛性を有する。このようなサンドイッチ構造であるため曲げ変形に比較してせん断変形の影響が大きくなる。縦桁や横桁が離散的に配置されるのだが、桁の間隔間で平均化することにより前述した直交異方性板を形成する。

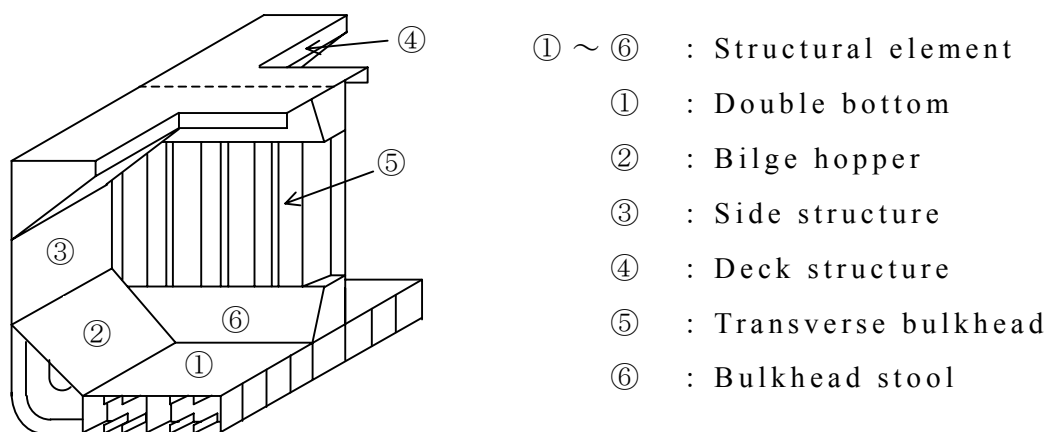


Fig.5.1.2 Perspective view of bulk carrier

5.3 ではこの直交異方性板にエネルギー法を適用し、周辺弾性固定（周辺支持状態も含む）条件における二重底構造振動における固有振動数の計算式を導く。さらに主船体との連成振動を考える場合には二重底を等価な分布質点－バネ－減衰系に置きかえるが、その方法について考察する。

5.4 では提案する二重底構造の計算法の精度を確認するためにまず静的問題として等分布荷重を与えた場合につき、有限要素法による数値解析（MSC/NASTRAN）による結果との比較を行い、その精度を検証し、同じく固有振動数計算における精度比較を行い、

提案する方法が実用上十分な精度で固有振動数を予測できることを実証する。

5.5 では本章のまとめと結論について記述する。

5.1.2 本章で用いられる記号とその説明

$[K_{ij}]$: 剛性マトリクス（正方マトリクス） $[\text{N} \cdot \text{m}^{-1}]$
$[M_{ij}]$: 質量マトリクス（正方マトリクス） $[\text{kg}]$
$\{\delta_i\}$: 未知変位ベクトル $[\text{m}]$
$\{\tilde{\delta}_i\}$: 静的解析により与えられる変位ベクトル $[\text{m}]$
w_{bx}	: x 軸に沿い二重底面に鉛直方向の曲げたわみ成分 $[\text{m}]$
w_{by}	: y 軸に沿い二重底面に鉛直方向の曲げたわみ成分 $[\text{m}]$
w_{sx}	: x 軸に沿い二重底面に鉛直方向の剪断たわみ成分 $[\text{m}]$
w_{sy}	: y 軸に沿い二重底面に鉛直方向の剪断たわみ成分 $[\text{m}]$
D_x	: y 軸まわりの曲げに対する単位幅あたりの曲げ剛性 $[\text{N} \cdot \text{m}]$
D_y	: x 軸まわりの曲げに対する単位幅あたりの曲げ剛性 $[\text{N} \cdot \text{m}]$
D_{xy}	: 二重底構造の単位幅あたりのねじり剛性 $[\text{N} \cdot \text{m}]$
GJ_1	: y 軸方向の周辺に配置されたねじり棒のねじり剛性 $[\text{N} \cdot \text{m}^2]$
GJ_2	: x 軸方向の周辺に配置されたねじり棒のねじり剛性 $[\text{N} \cdot \text{m}^2]$
S_x	: x 軸に沿った剪断変形に対する剪断バネ定数 $[\text{N} \cdot \text{m}^{-1}]$
S_y	: y 軸に沿った剪断変形に対する剪断バネ定数 $[\text{N} \cdot \text{m}^{-1}]$

5.2 二重底構造のモデル化

バルクキャリアー構造方式の概要を有限要素法で要素分割したものにより Fig.5.2.1 に示す。

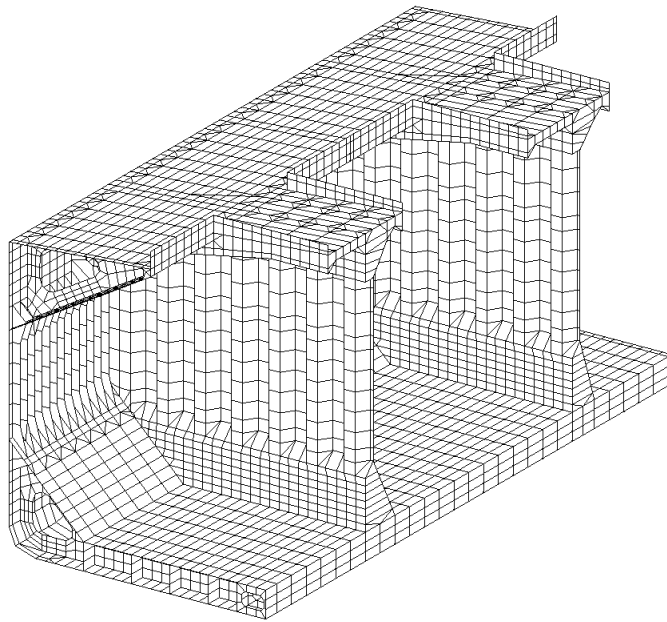


Fig.5.2.1 General view of bulk carrier structure

二重底構造，ビルジホップ，船側構造（甲板構造を含む），横隔壁より構成される。貨物となる鉄鉱石や石炭等はこの貨物倉に収納されるので貨物の下向き荷重を支える二重底構造はとりわけ重要である。この二重底とビルジホップを一種の直交異方性板（船の長さ方向と幅方向の剛性が異なる）とねじり棒（周辺で二重底の回転を弾性的に支持する）にモデル化する。船側構造や横隔壁構造の面外剛性はこのねじり棒の弾性に含めて考えることにより船の深さ方向を圧縮して Fig.5.2.2 に示すように構造をモデル化する。

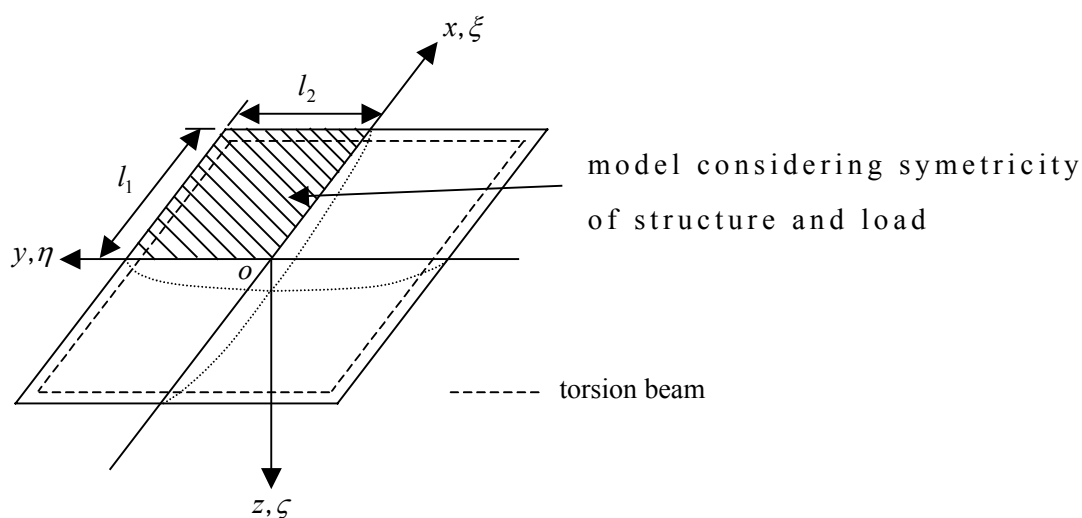


Fig.5.2.2 Structural model for double bottom structure

船底と内底板には Fig.5.2.3 に示すように約 3m～5m の間隔で配置される縦桁（Girder）の他に縦防撓材（Longitudinal sliffener）が取付けられるが船の幅方向にはほぼ 2m から 3m の間隔ごとに横桁（Floor）が設けられる。尚二重底の深さは 1.5m～2.0m 程度である。このように防撓材が縦方向（船の長さ方向）のみに配置されるため長さ方向と幅方向の剛性に違いが生じる。二重底構造の解析では方向による剛性の違いと船底と内底板間に空間の多いサンドイッチ構造であることによるせん断変形の影響を精度よく評価できることがモデル化のポイントとなる。

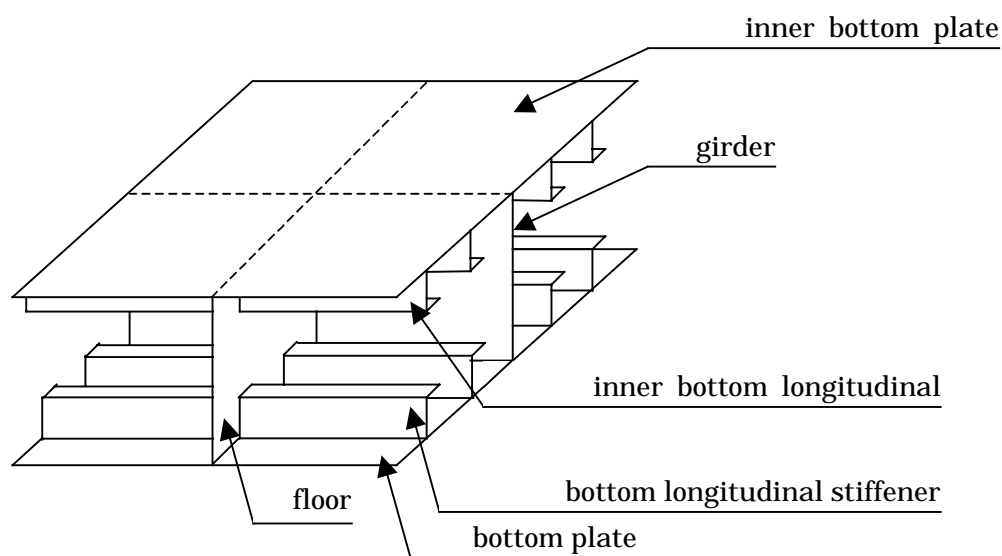


Fig.5.2.3 Definition of force/moment and their positive directions.

なお，構造解析においては Fig.5.2.2 に示すように構造の対称性を考慮して船の中心線と横隔壁間の中心線で分割した 1/4 モデルを採用し，この分割線に沿って回転を拘束（変位は自由）することにより全体を解析すると同等な機能を有する。

5.3 エネルギー法を用いた最低次固有振動数の計算

構造系の固有振動数を求める方程式をマトリクス形式で表示すると次式のようにになる。

$$[K_{ij}]\{\delta_i\} - \omega^2 [M_{ij}]\{\delta_i\} = 0 \quad (5.3.1)$$

ここで記号の意味は以下のとおりである。

$[K_{ij}]$: 剛性マトリクス

$[M_{ij}]$: 質量マトリクス

$\{\delta_i\}$: 未知変位行ベクトル

ω : 円固有振動数

行ベクトル $\{\delta_i\}$ が 0 以外の解を有するためには次の行列式が 0 とならなければならない。すなわち、

$$|K_{ij} - \omega^2 M_{ij}| = 0 \quad (5.3.2)$$

を満足する必要がある、未知変位 δ_i の数に等しい個数の固有振動数が与えられる。しかし、ここで問題としている二重底構造に限定すれば最低固有振動数が求められれば目的を達する。

このような最低固有振動数を求めるときに用いられるのは未知変位を静的問題として求めた既知変位行列 $\{\tilde{\delta}_i\}$ に置き換える方法である。その工学的妥当性について付録 5.1 に記述する。

この場合 (5.3.1) の左側から $\{\tilde{\delta}_i\}$ を掛けることにより円固有振動数 ω は次のように求められる。

$$\omega^2 = \frac{\{\tilde{\delta}_i\}^T [K] \{\tilde{\delta}_i\}}{\{\tilde{\delta}_i\}^T [M_{ij}] \{\tilde{\delta}_i\}} \quad (5.3.3)$$

ここで $\{\tilde{\delta}_i\}^T$: $\{\tilde{\delta}_i\}$ の転置列ベクトル

である。したがって最低固有振動数 $f(HZ)$ は

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\{\tilde{\delta}_i\}^T [K] \{\tilde{\delta}_i\}}{\{\tilde{\delta}_i\}^T [M_{ij}] \{\tilde{\delta}_i\}}} \quad (5.3.4)$$

として求められる。

5.3.1 エネルギー法による静解析

(1) エネルギー式の展開

二重底構造に等分布荷重 q が働く場合の静的解析をエネルギー法を用いて行い, $\{\tilde{\delta}_i\}$ を求める方法について記述する。

今 Fig.5.3.1 に示すように x, y, z 軸(無次元座標では ξ, η, ζ)をとり, z 軸方向のたわみ w を次のように曲げたわみとせん断たわみに分けて表現する。

$$\begin{aligned} w(x, y) &= w_{bx}(x, y) + w_{sx}(x, y) \\ &= w_{by}(x, y) + w_{sy}(x, y) \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

ここで $w_{bx}(x, y), w_{by}(x, y), w_{sx}(x, y), w_{sy}(x, y)$ は次のように定義する。

$w_{bx}(x, y)$: x 軸に沿った面に鉛直方向の曲げたわみ成分

$w_{by}(x, y)$: y 軸に沿った面に鉛直方向の曲げたわみ成分

$w_{sx}(x, y)$: x 軸に沿った面に鉛直方向のせん断たわみ成分

$w_{sy}(x, y)$: y 軸に沿った面に鉛直方向のせん断たわみ成分

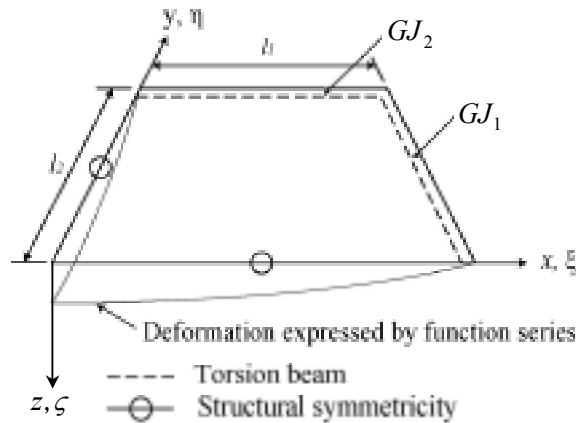


Fig.5.3.1 Structural idealization

たわみを (5.3.5)式で定義した場合の二重底構造の歪エネルギー V_D は次のように与えられる。式の誘導の詳細を付録 5.2 に示す。

$$\begin{aligned}
V_D = & \frac{D_x}{2} \int_0^{\ell_1} \int_0^{\ell_2} \left(\frac{^2w_{bx}}{x^2} \right)^2 dx dy + \frac{D_y}{2} \int_0^{\ell_1} \int_0^{\ell_2} \left(\frac{^2w_{by}}{y^2} \right)^2 dx dy + D_t \int_0^{\ell_1} \int_0^{\ell_2} \frac{^2w_{bx}}{x^2} \frac{^2w_{by}}{y^2} dx dy \\
& + \frac{D_{xy}}{2} \int_0^{\ell_1} \int_0^{\ell_2} \left\{ \left(\frac{^2w_{bx}}{x y} \right)^2 + 2 \left(\frac{^2w_{bx}}{x y} \right) \left(\frac{^2w_{by}}{x y} \right) + \left(\frac{^2w_{by}}{x y} \right)^2 \right\} dx dy \\
& + \frac{S_x}{2} \int_0^{\ell_1} \int_0^{\ell_2} \left(\frac{^2w_{sx}}{x} \right)^2 dx dy + \frac{S_y}{2} \int_0^{\ell_1} \int_0^{\ell_2} \left(\frac{^2w_{sy}}{y} \right)^2 dx dy
\end{aligned} \tag{5.3.6}$$

周辺に配置されるねじり棒の歪エネルギー V_J は次のように与えられる。

$$V_J = \frac{GJ_1}{2} \int_0^{\ell_2} \left(\frac{\partial^2 w_{bx}}{\partial x \partial y} \right)^2 dy + \frac{GJ_2}{2} \int_0^{\ell_1} \left(\frac{\partial^2 w_{by}}{\partial x \partial y} \right)^2 dx \tag{5.3.7}$$

ここで GJ_1, GJ_2 はねじり剛性 $[\text{N} \cdot \text{m}^2]$ で Fig.5.3.1 に示すように GJ_1 は y 軸に平行な周辺に設けられ, GJ_2 は x 軸に平行に配置されたねじり棒の剛性に対応する。

さらに等分布荷重 q が働く場合の外力の仕事 T は次のとおりである。

$$T = q \int_0^{\ell_1} \int_0^{\ell_2} w(x, y) dx dy \tag{5.3.8}$$

系のエネルギー κ を次のように置くことができる。

$$\kappa = V_D + V_J - T \tag{5.3.9}$$

この全エネルギー κ の極値をとった結果は山越 [33] のせん断変形を考慮した場合の変形方程式と一致する。検証結果を付録 5.3 に示す。

(5.3.6)式, (5.3.7)式および (5.3.8)式を無次元化表示すると各々次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
V_D = \frac{D_x}{2 \ell_1 \ell_2} \int_0^1 \int_0^1 & \left\{ A_1 \left(\frac{\partial^2 w_{b\xi}}{\partial \xi^2} \right)^2 + A_2 \left(\frac{\partial^2 y_{b\eta}}{\partial \eta^2} \right)^2 + A_3 \left(\frac{\partial^2 w_{b\xi}}{\partial \xi^2} \right) \cdot \left(\frac{\partial^2 w_{b\eta}}{\partial \eta^2} \right) \right. \\
& + A_4 \left(\frac{\partial^2 w_{b\xi}}{\partial \xi \partial \eta} \right)^2 + A_5 \left(\frac{\partial^2 w_{b\xi}}{\partial \xi \partial \eta} \right) \cdot \left(\frac{\partial^2 w_{b\eta}}{\partial \xi \partial \eta} \right) + A_6 \left(\frac{\partial^2 w_{b\eta}}{\partial \xi \partial \eta} \right)^2 \\
& \left. + A_7 \left(\frac{\partial w_{s\xi}}{\partial \xi} \right)^2 + A_8 \left(\frac{\partial w_{s\eta}}{\partial \eta} \right)^2 \right\} d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{5.3.10}$$

$$V_J = \frac{D_x}{2 \ell_1 \ell_2} \left\{ A_9 \left(\frac{\partial^2 w_{b\xi}}{\partial \xi \partial \eta} \right)_{\xi=1}^2 d\eta + A_{10} \left(\frac{\partial^2 w_{b\eta}}{\partial \xi \partial \eta} \right)_{\eta=1}^2 d\xi \right\} \tag{5.3.11}$$

$$T = q \ell_1 \ell_2 \int_0^1 \int_0^1 w d\xi d\eta \tag{5.3.12}$$

ただし無次元変数 ξ, η は変数 x, y に対して次のような関係を有する。

$$\xi = x/\ell_1 \quad \eta = y/\ell_2 \tag{5.3.13}$$

(5.3.10)式および (5.3.11)式に表れる無次元剛性比 A_i は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned}
 A_1 &= \lambda^2 \\
 A_2 &= \frac{D_y}{D_x} \cdot \frac{1}{\lambda^2} \\
 A_3 &= \frac{2D_1}{D_x} \\
 A_4 &= \frac{D_{xy}}{D_x} \\
 A_5 &= 2A_4 \\
 A_6 &= A_4 \\
 A_7 &= \frac{S_x \ell_1^2}{D_x} \cdot \lambda^2 \\
 A_8 &= \frac{S_y \ell_2^2}{D_x} \cdot \frac{1}{\lambda^2} \\
 A_9 &= \frac{GJ_1}{D_x \ell_1} \\
 A_{10} &= \frac{GJ_2}{D_x \ell_2}
 \end{aligned} \right\} \quad (5.3.14)$$

ここで $\lambda, D_x, D_y, D_{xy}, S_x, S_y$ は各々次の物理量を有する。

λ : ℓ_2/ℓ_1 [無次元量]

D_x : y 軸まわりの曲げに対する単位幅あたりの
曲げ剛性 [N・m]

D_y : x 軸まわりの曲げに対する単位幅あたりの
曲げ剛性 [N・m]

D_{xy} : 二重底の単位幅あたりねじり剛性 [N・m]

S_x : x 軸に沿ったせん断変形に対する
せん断バネ定数 [N・m⁻¹]

S_y : y 軸に沿ったせん断変形に対する
せん断バネ定数 [N・m⁻¹]

(2) たわみ関数式

(1) で与えたエネルギー式中に与えたたわみ $w(\xi, \eta)$ を (1) で述べた方法で求めることはできないので未知係数を含んだ関数列によって表現することとする。すなわち次式を考える。

$$\begin{aligned}
 w(\xi, \eta) &= \{ \delta_{BG} f_{BG}(\xi) + \delta_{SG} f_{SG}(\xi) + \delta_{\theta G} f_{\theta G}(\xi) \} \\
 &\quad \times \{ \alpha_{BF} \bar{f}_{BF}(\eta) + \alpha_{SF} \bar{f}_{SF}(\eta) + \alpha_{\theta F} \bar{f}_{\theta F}(\eta) \} \\
 &= \sum_{i=1}^n \delta_i f_i(\xi) \bar{f}_i(\eta)
 \end{aligned} \tag{5.3.15}$$

ここで添字の意味は以下のとおりである。

B : 曲げ, S : せん断, θ : 回転

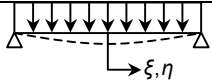
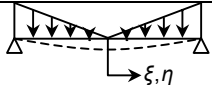
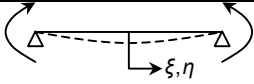
G : ガーダー (すなわち縦桁系)

F : フロア (すなわち横桁系)

(5.3.15) 中の関数の頭についた $-$ は ξ 方向と区別して η 方向を明示するために付したものである。また δ_i は未知変位 [m] を意味する。

ここで基本関数を Table 5.3.1 に示すように二重底の変位をもたらす基本既知関数によって与える。

Table 5.3.1 Fundamental function for double bottom

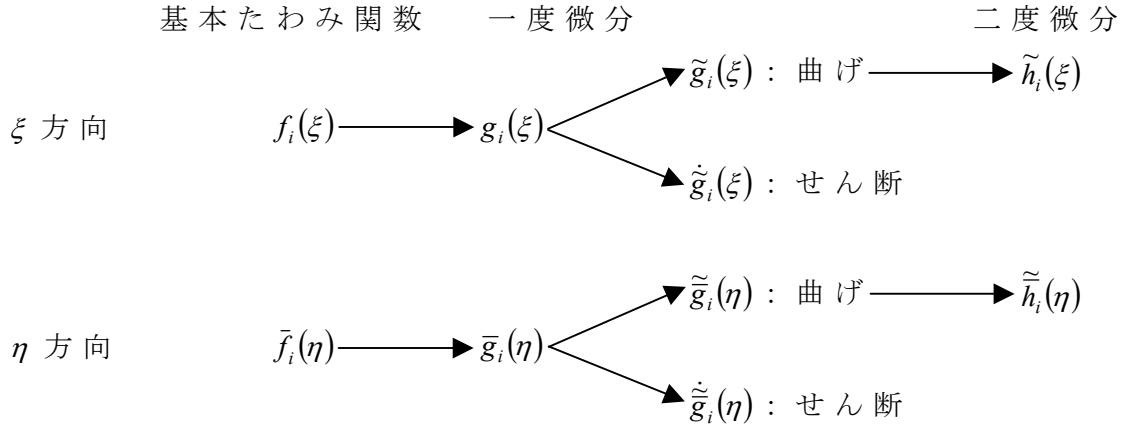
	Bending deflection		Shear deflection	
	f_{BG}	$5 - 6\xi^2 + \xi^4$	f_{SG}	$1 - \xi^{2.001}$
	f_{BF}	$5 - 6\eta^2 + \eta^4$	f_{SF}	$1 - \eta^{2.001}$
	f_{BG}	$9 - 10\xi^2 + \xi^5$	f_{SG}	$1 - \xi^3$
	f_{BF}	$9 - 10\eta^2 + \eta^5$	f_{SF}	$1 - \eta^3$
	$f_{\theta G}$	$1 - \xi^2$		
	$f_{\theta F}$	$1 - \eta^2$		

なお、等分布荷重によるせん断たわみについては、関数の二重定義を防止するため指数 2 を 2.001 としている。 $f_i(\xi)$ として 5 個の関数、 $\bar{f}_i(\eta)$ として 5 個の関数を用いるため (5.3.15) 式における未定

係数は $5 \times 5 = 25$ 個，すなわち $n=25$ となる。

(3) マトリクス要素と静変位ベクトル $\{\tilde{\delta}_i\}$ の計算

基本たわみ関数およびその微分項を次のような記号で表示する。



これらの関数全て Table 5.3.1 から導かれるものであり，既知関数である。これらを用いて (5.3.10)式, (5.3.11)式の歪エネルギー各項を一般的に表現すると次のように与えられる。

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_0^1 \int_0^1 \delta_i \delta_j [\text{微分形}] d\xi d\eta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_i \delta_j {}_k X_{ij} \cdot {}_k Y_{ij} \quad (5.3.16)$$

ここで

$$\left. \begin{array}{l} {}_k X_{ij} = \int_0^1 {}_k \alpha_i(\xi) {}_k \beta_j(\xi) d\xi \\ {}_k Y_{ij} = \int_0^1 {}_k \bar{\alpha}_i(\eta) {}_k \bar{\beta}_j(\eta) d\eta \end{array} \right\} \quad (5.3.17)$$

${}_k \alpha_i(\xi)$, ${}_k \beta_j(\xi)$, ${}_k \bar{\alpha}_i(\eta)$, ${}_k \bar{\beta}_j(\eta)$ は基本たわみ関数か，その微分項を一般的に表現したものとなっている。

一方，外力の仕事に関する (5.3.12)式を一般的に次のように表現する。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n \delta_i \int_0^1 f_i(\xi) d\xi \int_0^1 \bar{f}_i(\eta) d\eta &= \sum_{i=1}^n \delta_i P_i Q_i \\ P_i &= \int_0^1 f_i(\xi) d\xi \\ Q_i &= \int_0^1 \bar{f}_i(\eta) d\eta \end{aligned} \right\} \quad (5.3.18)$$

(5.3.9)式に与える系の全エネルギー κ は (5.3.16)式および (5.3.17)式を代入することにより次のように表現できる。

$$\kappa = \frac{D_x}{2\ell_1\ell_2} \sum_{k=1}^{10} A_k \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_i \delta_j {}_k Z_{ij} - q\ell_1\ell_2 \sum_{i=1}^n \delta_i U_i \quad (5.3.19)$$

ここで次のように記号を用いている。

$$\left. \begin{aligned} {}_k Z_{ij} &= {}_k X_{ij} \cdot {}_k Y_{ij} \\ U_i &= P_i Q_i \end{aligned} \right\} \quad (5.3.20)$$

(5.3.19)式の極値をとることにより未定静たわみ係数ベクトル $\{\tilde{\delta}_i\}$ は次のように与えられる。

$$\{\delta_i\} = \frac{q\ell_1^4}{D_x} \lambda^2 [ZZ_{ij}]^{-1} \{U_i\} \quad (5.3.21)$$

ただし ZZ_{ij} は次式を意味する。

$$ZZ_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10} A_k ({}_k Z_{ij} + {}_k Z_{ji}) \quad (5.3.22)$$

${}_k Z_{ij}$ は (5.3.18)式に示すように、基本たわみ関数あるいはその微分値の積の無次元積分値であり、これを一度計算してファイルしておけば、剛性比 A_k を変化させることで ZZ_{ij} を計算でき、剛性を変化させて適値を見出す場合のように、 A_k を数多く変化させる場合に、計算の合計時間を大幅に短縮できる。

以上の方法で q を付加質量を含めた静荷重として設定できれば、最低固有振動数計算に必要な変位ベクトル $\{\tilde{\delta}_i\}$ を確定できることになる。

なお、(5.3.8)式に与える剛性マトリクス $[K]$ の要素 K_{ij} は次式で与えられる。

$$K_{ij} = \frac{D_x}{\ell_1^2 \lambda} \cdot ZZ_{ij} \quad (5.3.23)$$

(4) 質量マトリクスの計算

振動の場合の運動エネルギー T は次のように与えられる。

$$T = \omega^2 \frac{1}{2} \cdot \frac{q \ell_1 \ell_2}{g} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_i \delta_j \int_0^1 f_i(\xi) f_j(\xi) d\xi \int_0^1 \bar{f}_i(\eta) \bar{f}_j(\eta) d\eta \quad (5.3.24)$$

したがって質量マトリクス $[M]$ の要素 MM_{ij} は次のように与えられる。

$$MM_{ij} = \frac{q}{2g} \ell_1^2 \lambda (M_{ij} + M_{ji}) \quad (5.3.25)$$

ここで M_{ij} は (5.3.24) 式の関係より次のように表現される。

$$M_{ij} = \int_0^1 f_i(\xi) f_j(\xi) d\xi \int_0^1 \bar{f}_i(\eta) \bar{f}_j(\eta) d\eta \quad (5.3.26)$$

(5.3.26) 式中の関数 $f_i(\xi)$ 等は Table 5.3.1 に示す基本たわみ関数であり一度計算してファイルしておけば任意の寸法 ℓ_1, λ, q を掛け合わせるによりパーソナルコンピュータ内で瞬時の計算が可能であり、前述の剛性マトリクス要素の計算と合わせて剛性や荷重の変化に対して迅速な計算対応ができることになる。

5.4 数値的検証

5.3 節で記述した解析法の推定精度を検証するために Fig.5.4.1 に示す二重底モデルを用い、汎用有限要素法解析コード MSC/NASTRAN による静的解析および最低固有振動数解析を行った。

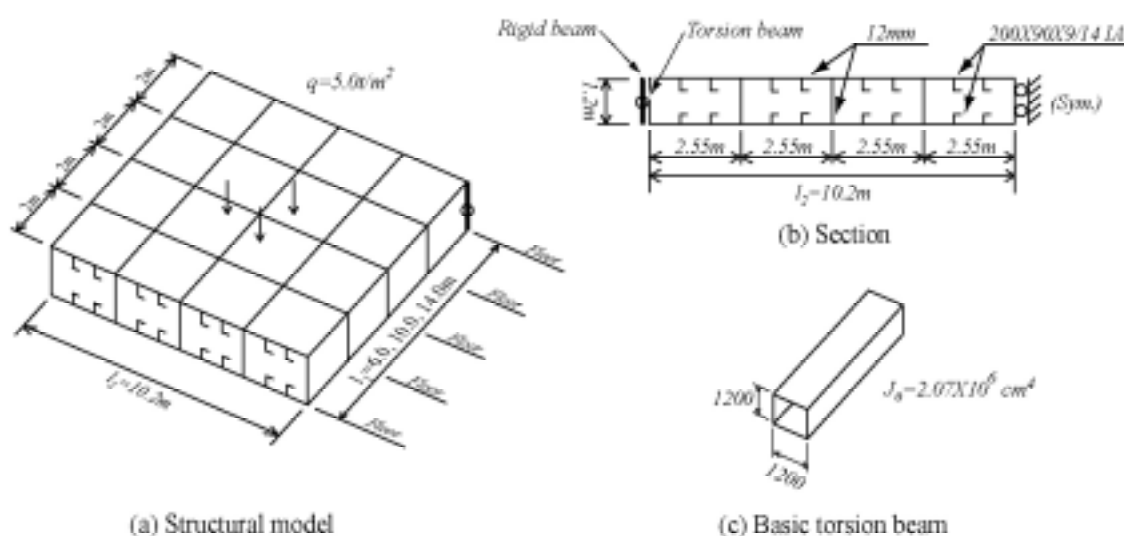


Fig.5.4.1 Structural model of double bottom structure

また、ホールドの半長さ ℓ_1 についてはフロア（横桁）枚数 m を変化させて $\ell_1=2(m) \times m$ としている。 ℓ_2 については固定し 10.2m を採用する。

なお、基本的なねじり棒の剛性は Fig.5.2.1(a) に示す⑥の横隔壁下部に設ける傾斜ボックス構造（Bulkhead stool）程度と仮定し Fig.5.4.1(c) に示す剛性を基準として採用する。また荷重として静的、振動解析とも次に示す荷重を採用する。

$$q=5\text{ ton/m}^2$$

5.4.1 静的解析

Fig.5.4.2 に有限要素法解析による結果と 5.3 節で記述した計算法によるものとの比較を示す。図中の Case1,2,3 および 4 は、基準のねじり棒の剛性 GJ_0 を変化させたもので Table 5.4.1 に示すよ

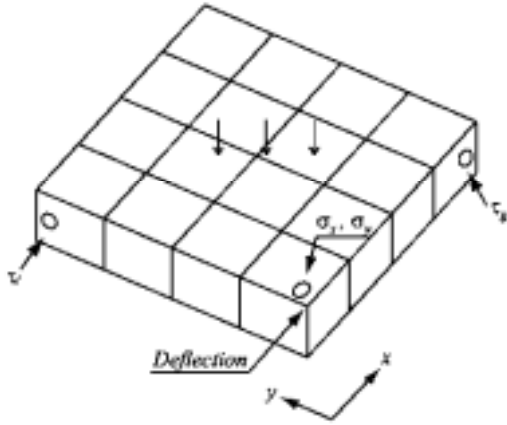
うな比率で剛性を変化させたものである。

Table 5.4.1 Rigidity ratio of η for torsion beam

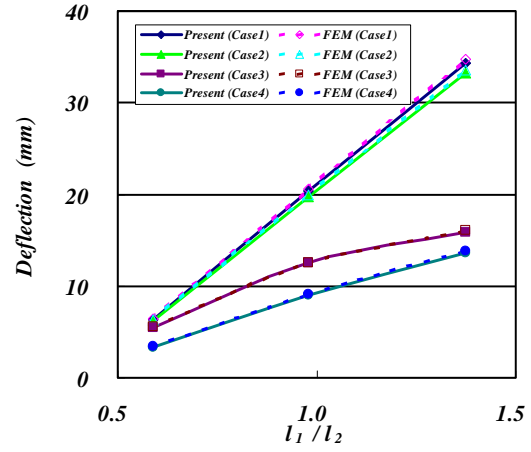
Case	1	2	3	4
Boundary condition	Simply, supported around boundary	One end supported other basic	One end supported other rigid	Rigid around boundary
$\eta_1 = GJ_1 / GJ_0$	1/1000	1/1000	1/1000	1000
$\eta_2 = GJ_2 / GJ_0$	1/1000	1	1000	1000

Fig.5.4.2 の結果を見ると 5.3 節で記述した計算法による計算値は有限要素法解析結果と非常に一致を示しており，誤差は高々 1% 程度であることが示された。本計算法による計算はデータ準備が非常に簡単で約 1 時間程度を要するに過ぎず解析もパーソナルコンピュータで瞬時に与えられる。

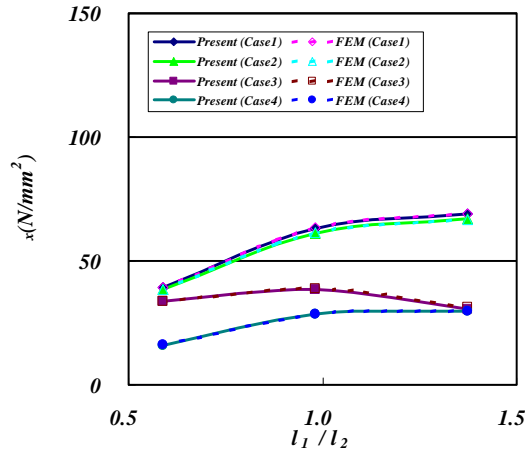
一方，有限要素法解析は要素分割，定義等の前準備に少なくとも 3 週間を要し，初期計画における本計算法の利便性は圧倒的である。



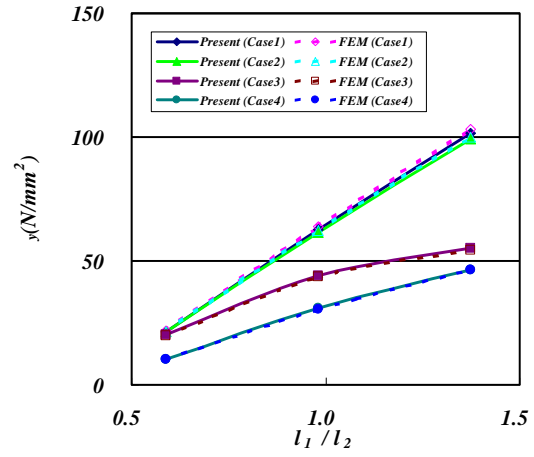
(a) Location of deflection and stress



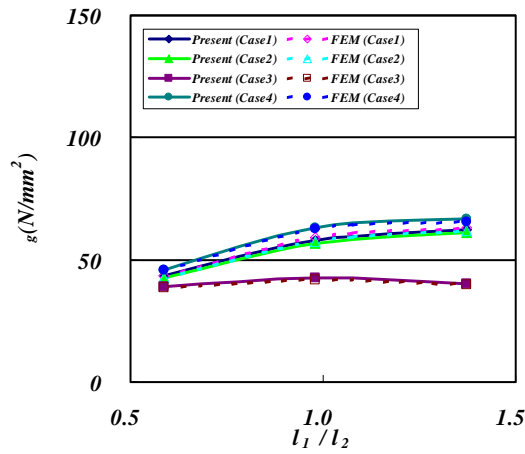
(b) Deflection



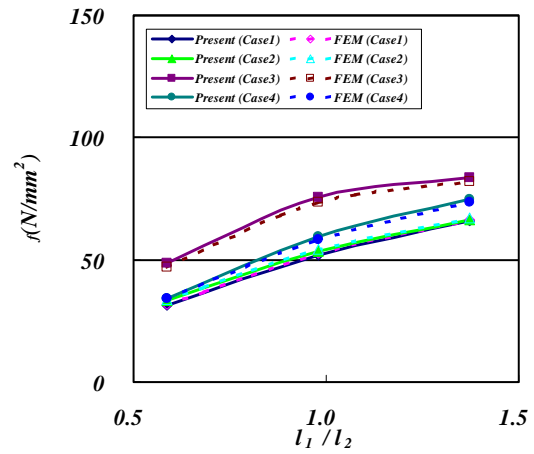
(c) σ_x stress on top plate



(d) σ_y stress on top plate



(e) τ_g stress on girder



(f) τ_f stress on floor

Fig.5.4.2 Comparison of deflection and stresses in static analysis

5.4.2 振動固有値解析

Fig.5.4.3 に 5.3 節で述べた計算法と有限要素法による振動解析との比較として，固有振動数の計算結果を示す。

荷重を静解析と同一の

$$q = 5 \text{ ton/m}^2$$

としている。これは構造質量と付加質量を考慮して定めたものである。縦横比 l_1/l_2 ，周辺条件を Table 5.4.1 に示す 4 ケースに代えても，両者の一致度は高く推定誤差は高々 2% 程度である。計算データ作成に要する時間は静的解析と同等であり，初期計画段階における振動予測に大きく貢献するものである。

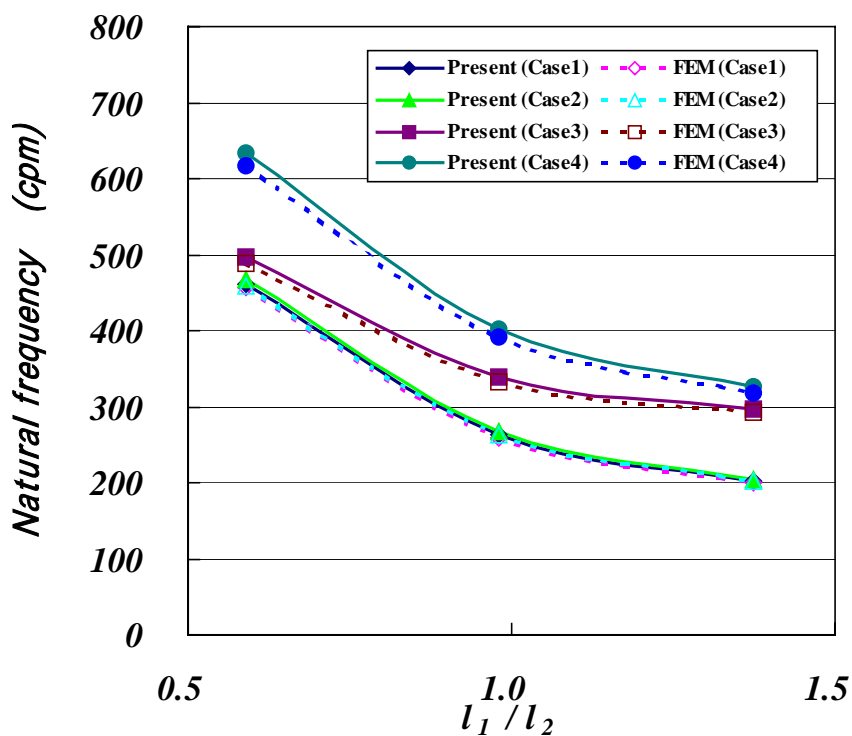


Fig.5.4.3 Comparison of natural frequency

5.5 結言

5 章ではバルクキャリアのような二重底構造を有する船舶において二重底振動が主船体振動に及ぼす影響について検討する前段階として，二重底構造の接水固有振動数を，有限要素法を用いた大がかりな数値計算を行うことなく，ごく限られた数のデータ入力による計算により短時間に推定を行う方法についてその論理を展開した。

5.1 節においては 5 章で検討する二重底構造振動計算において二重底構造を剪断変形の影響を顕著に受ける直交異方性板とし，周辺にねじり棒を配置した構造へのモデル化の考え方について記述した。

5.2 節においてはねじり棒を周辺に配置した直交異方性板としてのモデル化において特に二重底構造の構造的特性，すなわち横桁や縦桁が離散的に配置されるサンドイッチ構造形式による剛性上の特性として剪断変形の影響を大きく受けることを述べ，その影響を精度よく推定できる方法論を導き出す重要性について記述した。

5.3 節においてはいわゆる Rayleigh の方法と称される最低次固有振動数計算法について述べ，固有振動数算定において静的たわみを用いる方法を明らかにした。サンドイッチ構造で直交異方性板に相当する二重底構造と周辺のねじり棒に関してエネルギー法を用いた静的たわみベクトル $\{\tilde{\delta}_i\}$ の計算法を導き，剛性マトリクス $[ZZ_{ij}]$ および質量マトリクス $[M_{ij}]$ の計算法を明らかにした。これら $\{\tilde{\delta}_i\}, [ZZ_{ij}], [M_{ij}]$ を用いることにより最低次固有振動数を計算する方法を導いた。

5.4 節では導いた計算法の精度を確認するために有限要素法による数値計算結果との比較を試みた。静的解析についてはたわみ，

応力とも非常によい精度で今回明らかにした計算法による結果は有限要素法による数値計算結果と一致することを明らかにした。またこの静的解析によるたわみベクトルを用いて計算した最低次固有振動数は同じく有限要素法による数値解析値とよい精度で対応することを明らかにし、第 5 章の計算法の信頼性が高いことを実証した。

第 6 章

結 論

本研究の主たる目的は、船舶の振動予測において、膨大なデータの作成作業を供う大型解析ソフト（NASTRAN のような既販のものや境界要素法プログラム等）を駆使した解析が主流となっている現状では、結果はコンピュータまかせで、およそ人間の価値判断、結果の良否の判断が入り込む余地の非常に少ない、いわゆる、computer said vibration prediction（コンピュータおまかせ振動判断）の状態に立ち到っている現状に危機感を持ったことから始まった。

原始的な手計算による振動予測に復帰するということではなく、パーソナルコンピュータをうまく使いながら、振動の物理現象を的確にモデル化し、数理方程式を立て個々の物理パラメータの振動に及ぼす影響を把握しながら振動設計を行うのが設計者に課せられた任務である。大型コンピュータ解析による一見もっともらしい結果の是非を判断することなどおよそ不可能なことであるにもかかわらず、それが当然のこととしてまかり通っている現状は不自然である。

静的解析ならば、例え大型コンピュータによる解析結果でも、応力の流れを見れば解析結果の是非はほぼ判断できる。しかし、振動に関しては何故そのような振動モードとなるのか、何が効いてそうなるのか判断することは困難である。しかも振動においては、質量－剛性－減衰－外力それぞれに未知な部分が残っている。しかるが故に乗用車や航空機のような大量生産の輸送体では、解析は勿論十分やるにしても徹底した実機に対する実験による手直しが行われ、現実、振動が問題となることはない。一方、船舶の場合は多品種少量生産が原則であり、乗用車や航空機のような徹底性は非現実的である。このためにも、設計の初期段階において振動予測を的確にできる体制の確立が望まれる。

このような観点に立ち、まだ未知のままに残っている、あるいは、安易に大型数値解析を取り入れてしまう以下の項目について研究を行い、振動を人間の理性と感性の領域に取り戻すことをねらいとし研究を行った。

振動現象はそれが動的現象でもあるため把えにくい面がある。

今回の研究で全て解析的に振動を把握するまでには到らないが、今後の研究の積み重ねにより近い将来一環した解析システムの完成も可能であろう。

質量系：船体重量（貨物重量を含めた）に数倍する付加質量の予測。船体高次振動となると他の構造（例えば二重底構造）と連成が生じるがこのような連成場における付加質量の解析的予測法の確立。

減衰系：振動数が増加すれば減衰が大きくなるという単純な仮定でこれまでやってきた。グラフプロットするとバラツキが非常に大きい。小型船は大型船より同一振動モードなら振動数が高い。ならば、小型船の方が減衰は大きいのか。疑問は解明されていない。また流体減衰については現在時点未知のまま放置されている。

剛性系：船体構造は複雑であるが故に忠実に有限要素モデル化し多大な労力を費やすことにより解を得ようとする。構造の特質を的確に把握することにより構造のモデル化を行い、少なくとも少量のデータインプットとパーソナルコンピュータの世界で解析を行う。

以下は各章の総括と結論である。

第1章では、本研究の目的、これまで分かれてきた研究の概要、本研究の概要について述べた。

第2章では、船舶振動の支配的要素となる主船体の振動応答特性に焦点を絞り、主船体振動の基本となるビームの曲げ振動における波動特性について検討を行った。

検討の結果、共振時における振動の基本的特性とは以下のようなものであることが判明した。

イ．瞬時に共振に到るのではなく、無限の繰り返し後共振値に漸近（一般には振動数が高いので短時間に共振に達するよう

に感じる)。

ロ．過去の振動の累積が共振を形成するのが原則(ビームの曲げ振動では節数毎の累積)。

また、構造減衰(一般に使用されるのは粘性減衰)を仮定したときのビームの曲げ振動方程式を導き、振動波動は振動節数毎の有限速度で伝達し、ビーム端部での波動の反射が重畳されること。このときの重畳は振動波動の節数毎の和になることを明らかにした。また、この方法を高次振動領域まで拡張した。

今回の研究の結果を実証するために同一断面剛性で4種のビーム長さを有する片持梁の振動実験を行った。ビームの長さが異なるから当然振動数は個々異なった値をとるが、対数減衰率は振動数に無関係に一定となり、これまで通例的に用いられてきた振動数依存の対数減衰率では現象を説明し得ないことを明らかにした。

また、両端自由ビーム(長さ2mと4m)の空中振動実験を行い、対数減衰率は振動節数に比例することを明らかにした。ビーム長さが異なれば当然振動数は変化するが節数で整理すれば振動数が異なっても節数が同一ならば同一の対数減衰率を与えることを明らかにした。

一般に船舶の振動では熊井の方法による推定が行われ、これは減衰として振動数依存のいわゆる粘性減衰を仮定するものであるが、船のサイズをほぼカバーする3種類の船舶に対して熊井による方法と今回の研究による方法との比較を行った。横軸に振動節数、縦軸に対数減衰率をとると熊井の方法によれば船のサイズ毎、異なったカーブを与えるが、今回研究の方法によれば船のサイズに関係なく一本の線に乗る、いわゆる基礎実験と同じ傾向を与えることを明らかにした。

第3章では、主船体と二重底構造が連成振動を生ずる、いわゆる複合振動場における付加質量と流体減衰について成果をまとめた。付加質量を実測することは困難であり、計算による推定によらざるを得ないが、複合場での付加質量の計算法についてはこれまで明らかにされていなかった。今回の研究により付加質量につ

いて主船体振動が単独に生ずる場合のもの，二重底振動単独によるもの，およびその連成効果による３種類からなることを明らかにし，かつその計算法を明らかにした。

一方，流体減衰については環境としての流体場がポテンシャル場として表現される，いわゆる完全流体の仮定をしていたため，流体減衰が 0 となるとの仮定が通説であった。しかし，Rayleigh の速度に比例する抵抗の概念をポテンシャル場に導入することにより流体減衰が付加質量と密接な関係を有することを明らかにした。Rayleigh の速度に比例する抵抗係数 λ の性質を調査するため，第 2 章で行った片持梁と両端自由ビームの接水自然減衰実験を行い λ が振動数に比例する関係を与えることを明らかにした。しかし λ 値の定量化については片持梁実験と両端自由の実験では値のオーダーが異なった結果を与えた。これは両実験で自由表面における造波現象に大きなへだたりがあり，片持梁の実験では振動振幅が大きかったため，造波が大きかったことが原因しているものと考えられる。

第 4 章では，上部構造や二重底構造等との連成振動において重要な役割をはたす主船体の振動予測法について考察した。一般には変断面構造を有する主船体の振動は有限要素法を用いて行うのが通例だが，他構造との連成問題を有限要素法で解析すると何がどのように効いているのか，いないのか判断が困難であり，したがって問題のパラメータ数を極力少なくした解析的アプローチによりパラメータの感度解析を行う重要性がある。本研究においては，船体形状や，重量，剛性を簡単な関数分布で置き換える方法を明らかにし，エネルギー法を用いた固有振動数計算式を導いた。計算式の精度は有限要素法による結果と比較して非常に良い精度で一致することを明らかにした。

第 5 章では，船体高次振動領域で連成する貨物倉部二重底構造の面外振動予測法について研究した。
二重底構造は一種のサンドイッチ構造（あるいはハニカム構造）

であり，剪断変形の影響を大きく受けるばかりでなく，いわゆる異方性板としての特異性も有するため有限要素法によるしか計算の方法がないとされてきた。今回の研究では 3 種類の基本たわみから形成される 25 個の未知たわみ係数系をエネルギー法による静解析により静的たわみ行列を計算し，別途計算する剛性マトリクスと質量マトリクスを用いて，いわゆる Rayleigh 商の概念を応用して最低次固有振動数を計算する方法を導いた。また本解析法による結果と有限要素法による結果を比較し両者が非常に良い精度で一致することを確認した。このような簡易解析はデータ作成も含めて 30 分もあれば可能であるが，これを有限要素法解析であると約 3 週間を要する。解析的アプローチは時間短縮の観点からも大切である。

本研究の成果を設計初期計画段階で適用するにあたっては，いくつかの残された課題がある。振動予測の最終的目標は居住区画の振動応答予測である。

この予測を可能にするために追加すべき項目は以下のようなものである。ただし，純然たる設計手法の問題である。

イ． 居住区画単独の振動予測法

居住区画の形状的バリエーションが大きく，解析的な手法をとることは困難である。居住区画を船の幅方向に圧縮した二次元有限要素モデルにより解析する方法の確立。

ロ． 主船体と二重底構造の連成振動計算法

ハ． 上部構造－主船体－二重底構造の連成と応答の計算法

今回の研究により振動の本質的問題である減衰機構と付加質量の予測法および構造振動の解析的予測法についてはかなりの解明が進んだ。今後多方面での研究，実験が進み，定量的判断ができる段階に進むことが望まれる。

謝 辞

本論文を纏めるに当たり、この3年間懇切なるご指導をいただきました只木 進一先生（佐賀大学教授）には深甚なる謝意を表します。

また日永田 泰啓先生（佐賀大学助教授）には、只木先生と共に、筆者の論文素稿に対して数多くのアドバイスいただきましたことに深く感謝いたします。

米山 博志先生（佐賀大学教授）、近藤 弘樹先生（佐賀大学教授）には、論文に対し種々ご助言をいただきました。心よりお礼申し上げます。

論文中の実験に関しては、原 要一郎先生（佐世保工業高等専門学校教授）から数多くのご援助をいただき、名村エンジニアリング（株）太田 貴大君には、計算プログラムの作成、図表の生成、原稿整理と多大の援助をいただきました。感謝いたしております。

筆者が、只木研究室にお邪魔し、ご助言をいただくようになってから、ほぼ5年の歳月が経過しました。このうち3年間は社会人特別選抜制度により、博士後期課程においていろいろと勉強する機会が与えられました。工学系である筆者を理学系研究室に受け入れてくださった佐賀大学工学系研究科および只木先生の寛容なる対処には深い感謝の念を抱いております。

思えば遙か昔、講義への出席常ならずの筆者を快く研究室に受け入れてくださり、卒業論文、Lamb の *Hydrodynamics* を教科書とした輪講への参加を通じて、学問することのすばらしさ、数学の美しさをお教えいただきました、故波多野 修次先生（広島大学名誉教授）には心からの感謝を申し上げたく思います。先生には大学院への進学を強く勧められたにもかかわらず、事情それを

許さず断念した経緯があります。それから40年。

ようやくその夢を果たすことができました。筆者のような高齢者を受け入れてくださった佐賀大学に対する感謝の念は大なるものがあります。

筆者の年齢からすると、今後、社会的に貢献できる機会はそれほど多くは残されていませんが、この3年間に培った研究の方法論を、現実の対象、問題に適用し成果を見ることができるようこれから努力していく所存です。

参考文献

- [1] 加藤 瞭 他：初期計画における船体振動評価法の構築（その 1 二重底構造固有振動数の推定），西部造船会会報，
- [2] 第 104 号，（2002），pp.193-199
- [3] 加藤 瞭 他：初期計画における船体振動評価法の構築（その 2 主船体振動数の予測），西部造船会会報，第 105 号，（2003），pp.257-263
- [4] 加藤 瞭 他：振動減衰に関する予備実験と考察，西部造船会会報，第 106 号，（2003），pp.125-134
- [5] Katoh, A. et al. : On Study and Experiments for Structural and Hydrodynamic Damping on Hull Girder Vibration, J. West-Japan Society of Naval Architects, NO.107, (2004), under publication
- [6] B.J.Lazan : Energy Dissipation Mechanisms in Structures, with Particular Reference to Material Damping, Structural Damping, Pergamon Press, (1968), pp.1-34
- [7] ティモシェンコ：工業振動学，東京図書株式会社，（1968），pp.58-74
- [8] 斉藤秀雄：工業基礎振動学，養賢堂，（1973），pp.32-43
- [9] L.マイロビッチ：振動解析の理論と応用，ブレイン図書出版，（1993），pp.13-21
- [10] 熊井豊二：船体高次振動の減衰率におよぼす剪断撓みおよび回転慣性の影響について，日本造船学会論文集，第 115 号，（1964），pp.139-143
- [11] 熊井豊二：船体高次振動の減衰率について，日本造船学会論文集，第 102 号，（1958），pp.143-150
- [12] 山本善之 他：船体振動の減衰力の研究，日本造船学会論文集，第 118 号，（1966），pp.138-146
- [13] 日本海事協会編：船舶振動設計指針，日本海事協会，（1981），pp.240

- [14] 武田 裕 他：船体振動の減衰同定法の研究(第 1 報)，日本造船学会論文集，第 189 号，(2001)，pp.273-279
- [15] 武田 裕 他：船体振動の減衰同定法の研究(第 2 報)－実船起振機試験の同定結果，日本造船学会論文集，第 191 号，(2002)，pp.283-290
- [16] 武田 裕 他：船体振動の減衰同定法の研究(第 3 報)－構造・流体連成系の減衰係数の分離，日本造船学会論文集，第 192 号，(2003)，pp.583-590
- [17] F.M.Lewis: THE INERTIA OF THE WATER SURROUNDING A VIBRATING SHIP, THE SOCIETY OF NAVAL ARCHITECTS AND MARINE ENGINEERS, Vol.37, (1929)
- [18] 熊井豊二：船体上下振動付加質量の三次元修正値について(第 1 報 楕円体の振動における J)，日本造船学会論文集，第 112 号，(1963)，pp.85-90
- [19] Kumai, T. : On the Three-Dimensional Entrained Water in Vibration of Lewis' Section Cylinder with Finite Length, J.WJSNA, Vol.50, (1975), pp.173-179
- [20] 香川 洸二 他：バルクキャリアの構造振動特性の研究(第 1 報)，西部造船会会報，第 69 号，(1985)，pp.217-225
- [21] 香川 洸二 他：バルクキャリアの構造振動特性の研究(第 2 報)，西部造船会会報，第 71 号，(1986)，pp.207-220
- [22] 加藤 瞭 他：構造内力としてのスロッシング圧の初期推定法(その 1 多数の横桁が配置された場合)，西部造船会会報，第 98 号，(1999)，pp.89-96
- [23] Todd, F.H. : Ship Hull Vibration, Edward Arnold LTD, (1961)
- [24] Kumai, T : On the Estimation of Natural Frequencies of Vertical Vibration of Ships, J.JSNA, Vol.121, (1967), pp.175-182
- [25] 大高勝夫 他：遷移行列法による船体振動計算に関する一考察，西部造船会会報，第 45 号，(1973)，pp.153-172
- [26] Katoh, A. et al : Evaluation of Strength for Double Hull

Structure in Initial Hull Planning and Optimization of Hull Weight with Genetic Algorithms, J.S.N.A. in Japan, NO184, (1999), pp.543-553

- [27] 加藤 瞭 他：バルクキャリアの構造初期計画システムの構築，西部造船会会報，第 98 号，(1999)，pp.177-185
- [28] 加藤 瞭：初期計画における二重殻船体構造の最適設計法に関する研究，広島大学学位論文，(1998)
- [29] 田宮 真：遊動水の動的影響について，日本造船学会論文集，第 103 号，(1958)，pp.59-67
- [30] 山越道郎 他：船体振動と船底振動との連成について，日本造船学会論文集，第 118 号，(1966)，pp.147-159
- [31] 末次一誠 他：船底振動について，関西造船協会会誌，第 111 号，(1963)，pp.47-59
- [32] 熊井豊二：剪断振動としての船体高次振動について，日本造船学会論文集，第 99 号，(1956)，pp.93-100
- [33] ティモシェンコ：工業振動学，東京図書株式会社，(1968)，pp.297-303
- [34] 山越道郎：二重底構造の撓みおよび応力分布におよぼす剪断変形影響，日本造船学会誌，第 472 号，(1968)，pp.
- [35] 寺沢 一雄 監修：船体構造力学，海文堂，(1974)，pp.631-637
- [36] 大高勝夫他：ディーゼル機関の不均衡力，偶力による船体振動，vol.5，pp.476-487

付 録

付録 2.1 $m\ddot{x} + kx = f_0 \sin \omega t$ に対する解の分解

今

$$\frac{k}{m} = p^2 \quad (\text{A2.1.1})$$

とおく。

(1) 同次方程式

次式に示同次方程式

$$\ddot{x} + p^2 x = 0 \quad (\text{A2.1.2})$$

の解 x_0 は

$$x_0 = a \cos pt + b \sin pt \quad (\text{A2.1.3})$$

で与えられる。

(2) 強制振動項

共振振動項の解を x_1 とすると振動方程式を満足する強制項は

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{p^2 - \omega^2} \cdot \frac{f_0}{m} \sin \omega t \\ &= \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{p}\right)^2} \cdot \frac{f_0}{k} \sin \omega t \end{aligned} \quad (\text{A2.1.4})$$

により求められる。

(3) 振動応答

同次方程式の解 x_0 に強制振動項の解 x_1 を加えることにより周期的起振力を受ける無減衰振動体の解は次のように求められる。

$$x = x_0 + x_1 = a \cos pt + b \sin pt + \frac{f_0}{k} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{p}\right)^2} \sin \omega t$$

初期条件として $t=0$ で $x=0$, $\dot{x}=0$ と考えると

$t=0$ で $x=0$ より $a=0$ が与えられ、

$$t=0 \text{で } \dot{x}=0 \text{ より } b = -\frac{f_0}{k} \cdot \frac{\frac{\omega}{p}}{1 - \left(\frac{\omega}{p}\right)^2} \text{ が明らかとなる。}$$

したがって振動変位 x は次式で与えられることになる。

$$x = \frac{f_0}{k} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{p}\right)^2} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{p} \sin pt \right) \quad (\text{A2.1.5})$$

今 $p - \omega = 2\Delta$ とおけば ($\frac{f_0}{k} = \delta_{st}$ とおく)、(A2.1.5)式に代入して整理す

ることにより次のような簡明な式が与えられる。

$$\begin{aligned} x &= \frac{\delta_{st}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega + 2\Delta}\right)^2} \left\{ \sin \omega t - \frac{\omega}{\omega + 2\Delta} \sin(\omega + 2\Delta)t \right\} \\ &\doteq \frac{\delta_{st}}{1 - \left(1 - \frac{2\Delta}{\omega}\right)^2} \left\{ \sin \omega t - \left(1 - \frac{2\Delta}{\omega}\right) (\sin \omega t + \cos \omega t \cdot \sin 2\Delta t) \right\} \\ &\doteq \frac{\delta_{st}}{4 \frac{\Delta}{\omega}} \left(\sin \omega t - \sin \omega t + \frac{2\Delta}{\omega} \sin \omega t - \cos \omega t \cdot \sin 2\Delta t \right) \\ &\doteq -\frac{\delta_{st}}{2} \omega t \cdot \frac{\sin 2\Delta t}{2\Delta t} \cdot \cos \omega t \\ &= -\frac{\delta_{st}}{2} \omega t \cdot \cos \omega t \end{aligned} \quad (\text{A2.1.6})$$

今

$$t = \frac{2\pi}{\omega} n \quad (\text{A2.1.7})$$

とおくと x の満足すべき関係は次に示すとおりとなる。

$$\begin{aligned} x &= -\frac{\delta_{st}}{2} \cdot 2\pi n \\ &= -\pi \delta_{st} \cdot n = -\pi \delta_{st} \overbrace{(1+1+1+\cdots+1)}^n \end{aligned} \quad (\text{A2.1.8})$$

すなわち共振とは $n \rightarrow \infty$ のとき $x \rightarrow \infty$ ということであり、
Fig.A2.1.1 に示すように

- イ． 時間の経過とともに x は無限大へ発散 (Fig.A2.1.1)、すなわち瞬時に同調が生じるものではない
- ロ． (A2.1.8)より共振とは過去の静的変位の π 倍が積算されたもの (Fig.A2.1.2)

という性格を有する。

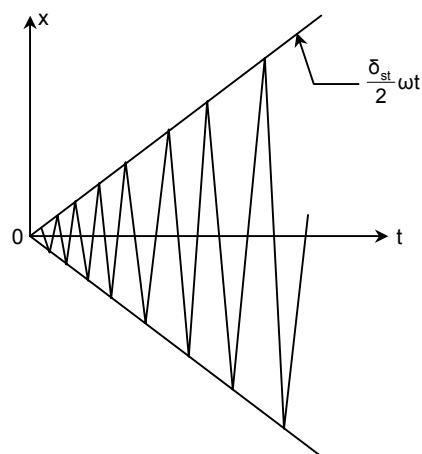


Fig.A2.1.1 Divergence of vibration in case of no damping

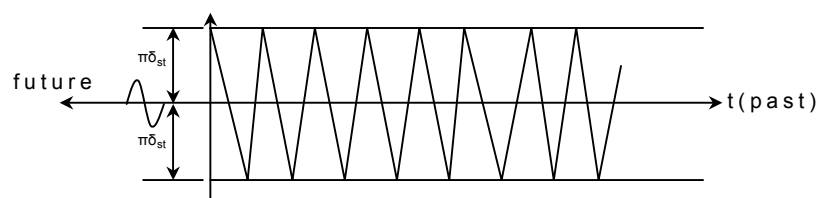


Fig.A2.1.2 Time history of vibration component

付録 2.2 $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f_0 e^{i\omega t}$ における解の分解

$$\ddot{x} + \xi p \dot{x} + p^2 x = \frac{f_0}{m} e^{i\omega t} \quad (\text{A2.2.1})$$

を解く。

(1) 同時方程式

$$x \sim e^{(-\alpha + \beta i)t} \quad (\text{A2.2.2})$$

とおき実数項と虚数項に分ける。

$$\left. \begin{array}{ll} (-\alpha + \beta i)^2 + \xi p(-\alpha + \beta i) + p^2 = 0 \\ \text{実数項} & \alpha^2 - \beta^2 - \xi p\alpha + p^2 \\ \text{虚数項} & -2\alpha\beta + \xi p\beta = 0 \end{array} \right\} \quad (\text{A2.2.3})$$

(A2.2.3)式を整理すると α 、 β は次のように与えられる。

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = \frac{\xi}{2} p \\ \beta^2 = \frac{\xi^2}{4} p^2 - \frac{\xi^2}{2} p^2 + p^2 = p^2 \left(1 - \frac{\xi^2}{4} \right) \doteq p^2 \rightarrow \beta = p \end{array} \right\} \quad (\text{A2.2.4})$$

以上より同次方程式の解 x_0 は (A2.2.2) 式の α 、 β に (A2.2.4) 式の関係を代入することにより与えられる。

$$x_0 = A e^{\left(-\frac{\xi}{2} + i \right) p t} \quad (\text{A2.2.5})$$

(2) 強制項

(A2.2.1) 式に $x_1 = X e^{i\omega t}$ を代入して整理する。

$$X \{ (p^2 - \omega^2) + i \xi p \omega \} = \frac{f_0}{m} \quad (\text{A2.2.6})$$

したがって X は次のように整理できる。

$$\begin{aligned}
X &= \frac{f_0}{k} \cdot \frac{1}{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{p}\right)^2\right\} + \xi \frac{\omega}{p} i} \\
&= \frac{f_0}{k} \cdot \frac{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{p}\right)^2\right\} - i \xi \frac{\omega}{p}}{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{p}\right)^2\right\}^2 + \left(\xi \frac{\omega}{p}\right)^2}
\end{aligned} \tag{A2.2.7}$$

したがって一般解は x_0 と x_1 の和によって与えられ、次のようになる。

$$\begin{aligned}
x &= x_0 + x_1 \\
&= A e^{\left(-\frac{\xi}{2} + ip\right)t} + \frac{f_0}{k} \cdot \frac{\left\{1 - \left(\frac{\omega^2}{p}\right)\right\} - i \left(\xi \frac{\omega}{p}\right)}{\left\{1 - \left(\frac{\omega^2}{p}\right)\right\}^2 + \left(\xi \frac{\omega}{p}\right)^2} e^{i\omega t}
\end{aligned} \tag{A2.2.8}$$

初期条件として $t=0$ で $x=0$ を考えると (A2.2.8) 式より A は次式で示すようになる。

$$A = -\frac{f_0}{k} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\omega}{p}\right)^2 - i \left(\xi \frac{\omega}{p}\right)}{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{p}\right)^2\right\}^2 + \left(\xi \frac{\omega}{p}\right)^2} \tag{A2.2.9}$$

したがって解は最終的に次のように与えられる。

$$x = \frac{f_0}{k} \frac{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{p}\right)^2\right\} - i \left(\xi \frac{\omega}{p}\right)}{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{p}\right)^2\right\}^2 + \left(\xi \frac{\omega}{p}\right)^2} \left\{ e^{i\omega t} - e^{\left(-\frac{\xi}{2} + ip\right)t} \right\} \tag{A2.2.10}$$

共振時すなわち $\omega=p$ のとき (A2.2.10) 式より x は次のように表現される。

$$x = -i \frac{f_0}{k} \frac{1}{\xi} e^{ipt} \left(1 - e^{-\frac{\xi}{2} pt} \right) \tag{A2.2.11}$$

今波頂の時間的变化を調べるために

$$t = \frac{2\pi m}{p} \quad (\text{A2.2.12})$$

とおくと波頂の時間変化は次の通りとなる。

$$\begin{aligned} x &= -i \frac{f_0}{k} \cdot \frac{1}{\xi} e^{2\pi m i} (1 - e^{\pi \xi n}) \\ &= -i \frac{\delta_{st}}{\xi} (1 - e^{-\pi \xi n}) \\ &= -i \frac{\delta_{st}}{\xi} (1 - e^{-\pi \xi}) \left\{ 1 + e^{-\pi \xi} + \dots + (e^{-\pi \xi})^{n-1} \right\} \\ &= -i \pi \delta_{st} \left\{ 1 + e^{-\pi \xi} + \dots + (e^{-\pi \xi})^{n-1} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A2.2.13})$$

Fig.A2.2.1 に変位時間的变化を示す。また Fig.A2.2.2 に示すように共振とは過去に生じた減衰変位を 1 波頂毎加算したものであることが分かる。

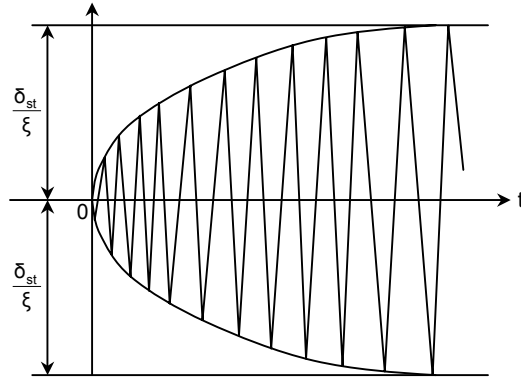


Fig.A2.2.1 Convergence of x in resonance

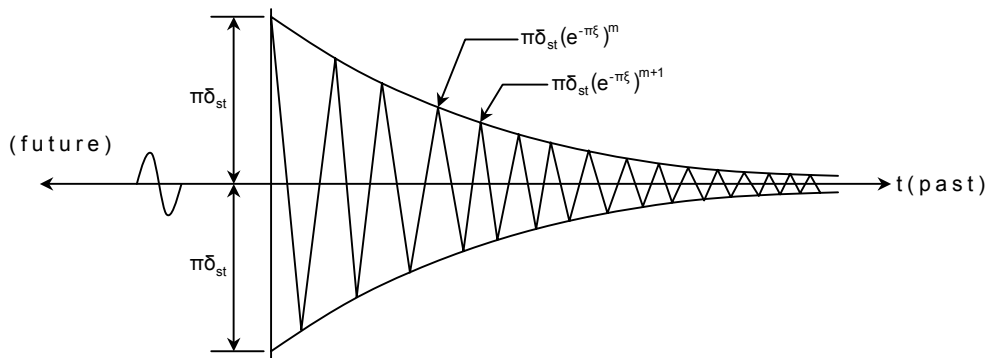


Fig.A2.2.2 Time history of vibration component

付録 2.3 動粘性減衰と構造減衰

船体構造のように鋼材の減衰が支配的な場合、構造減衰と称される減衰特性を示すべきであるが、一般に動粘性減衰的挙動を示すとしてこれまで採用されてきた経緯がある。

ここでは、バネ－減衰系にモデル化してこの動粘性減衰と構造減衰の特性について記述する。なお基本的な考え方は文献 [7] に記述されている。

(1) 動粘性減衰による発散エネルギー

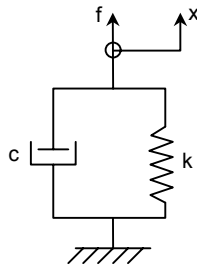


Fig.A3.1 Visco-dynamic model

今 Fig.A3.1 に示すモデルに外力 f が働くときの力のバランスは次式で与えられる。

$$f = kx + c\dot{x} \quad (\text{A2.3.1})$$

変位が周期的で

$$x = x_0 \cos \omega t \quad (\text{A2.3.2})$$

の場合は (A2.3.2) 式を (A2.3.1) 式に代入することにより次式のようになる。

$$f = kx_0 \cos \omega t - c\omega x_0 \sin \omega t \quad (\text{A2.3.3})$$

この場合、1 周期中の発散エネルギー U_d は

$$\begin{aligned} U_d &= \int f dx = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f \dot{x} dt \\ &= -x_0^2 \omega \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} (k \cos \omega t - c\omega \sin \omega t) \sin \omega t dt \\ &= \pi \omega c x_0^2 \end{aligned} \quad (\text{A2.3.4})$$

として与えられる。

(2) 構造減衰

構造減衰の場合、1 サイクルでの発散エネルギーは振幅（あるいは歪）にのみ依存し、振動数（すなわち振動速度）には無関係で次のように与えられる。

$$U_d = \alpha \cdot x_0^2 \quad (\text{A2.3.5})$$

今 (A2.3.4) 式と (A2.3.5) 式を等置すると

$$c = \frac{\alpha}{\pi\omega} \quad (\text{A2.3.6})$$

となり等価な動粘性減衰力 F_d は

$$F_d = \frac{\alpha}{\pi\omega} \cdot \dot{x} \quad (\text{A2.3.7})$$

で与えられる。今調和振動を考え、変位 x を複素数表示で表す。

$$x = x_0 e^{i(\omega t - \beta)} \quad (\text{A2.3.8})$$

したがって \dot{x} は次のように与えられる。

$$\dot{x} = i\omega x \quad (\text{A2.3.9})$$

このとき等価減衰力 F_d は (A2.3.9) 式を (A2.3.7) 式に代入することにより次式で示すものとなる。

$$F_d = i \frac{\alpha}{\pi} x \quad (\text{A2.3.10})$$

今

$$\gamma = \frac{\alpha}{\pi k} \quad (\text{A2.3.11})$$

とおくとき質量－バネ－減衰の振動方程式は次式で表現できることになる。

$$m\ddot{x} + k(1 + i\gamma)x = f(t) \quad (\text{A2.3.12})$$

$k(1 + i\gamma)$ を通常複素バネ定数と称する。

(3) 振動方程式の比較

動粘性減衰の場合の振動方程式は一般に次式で表される。

$$m\ddot{x} + k\left(1 + \xi \frac{d}{dt}\right)x = f(t) \quad (\text{A2.3.13})$$

ここで ξ は次の関係式を満足する。

$$\xi = \frac{c}{k} \quad (\text{A2.3.14})$$

一方、構造減衰の場合は (A2.3.12) 式で与えられる。

付録 2.4 振動方程式における動粘性影響項の導出根拠

均一ビームの曲げ振動方程式は一般に次式が用いられる。

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \left(1 + \alpha \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = F(x, t) \quad (\text{A2.4.1})$$

ここで m : 単位当たりの質量 $[\text{kg} \cdot \text{m}^{-1}]$

$y(x, t)$: ビームの横たわみ $[\text{m}]$

E : 材料のヤング率 $[\text{N} \cdot \text{m}^{-2}]$

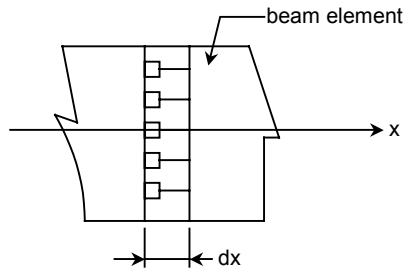
I : ビーム断面の慣性モーメント $[\text{m}^4]$

α : 減衰率 $[\text{s}]$

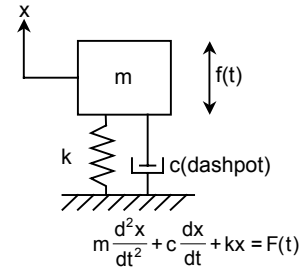
$F(x, t)$: ビームに働く分布外力 $[\text{N} \cdot \text{m}^{-1}]$

(A2.4.1)式は多くの振動教科書に採用されているが、減衰項の表現については明らかでないので、ここで物理的考察を行う。

今 Fig.A2.4.1(a)に示すビーム要素に無限に分布するダッシュポットを仮定する。これは Fig.A2.4.1(b)に示す質点－バネ－ダッシュポットの概念をビーム断面に適用したものである。



(a) Distributed dashpot
in beam element



(b) Dashpot model for vibration
of mass-spring system

Fig.A2.4.1 Dashpot model for vibration analysis

この場合、Fig.A2.4.1(a)に示す x 方向の変位を u とおくと、速度に比例する抵抗 f は次のように与えられる。

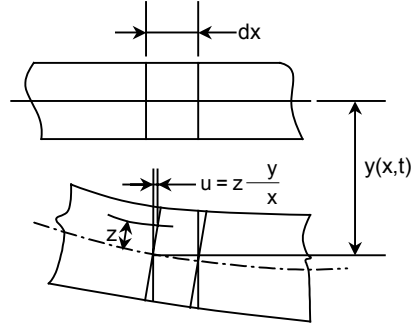
$$f = c \frac{\partial x}{\partial t} = c \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{u(x+dx, t) - u(x, t)}{dx} \right] = c \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \quad (\text{A2.4.2})$$

u は Fig.A2.4.2 よりたわみに関係しており、水平移動 u は次式で

求められる。

$$u = -z \frac{\partial y}{\partial x} \quad (\text{A2.4.3})$$

ここで z は断面中性軸からの距離を表す。



FigA2.4.2 Movement of beam section due to bending

断面に働く分布ダッシュポットによる曲げモーメント M_d は次のとおりである。

$$M_d = \int_A f z dA = c \int_A z^2 \frac{\partial^3 y}{\partial t \partial x^2} dA = cI \frac{\partial^3 y}{\partial t \partial x^2} \quad (\text{A2.4.4})$$

ここで dA は z と $z+dz$ 間のビームの断面積を意味する。

Fig.A2.4.3 の関係より等価な下向き分布荷重 $w_d(x,t)$ は

$$w_d(x,t) = -\frac{\partial^2 M_d}{\partial x^2} = -cI \frac{\partial^5 y}{\partial t \partial x^4} \quad (\text{A2.4.5})$$

として与えられる。なおビームの曲げによる等価な下向き荷重 $w_d(x,t)$ は

$$w(x,t) = -EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \quad (\text{A2.4.6})$$

で与えられる。

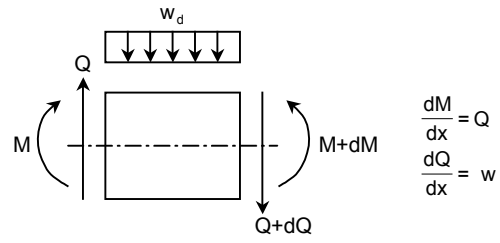


Fig.A2.4.3 Balance of moment (M),
shear force (Q) and distributed load

今

$$c = E\alpha \quad (\text{A2.4.7})$$

とおき要素における力のバランスをとる。

$$\begin{aligned} m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= F(x, t) + w(x, t) + w_d(x, t) \\ &= F(x, t) - EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - EI\alpha \frac{\partial^5 y}{\partial t \partial x^4} \end{aligned} \quad (\text{A2.4.8})$$

したがって (A2.4.1) 式の関係が導かれた。

付録 2.5 ビームの曲げ振動における応答特性

1. 振動波動の特性

ビーム曲げ振動に対する方程式は、減衰を無視した場合、次式で与えられる。

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = F(x, t) \quad (\text{A2.5.1})$$

今 $F(x, t) = 0$ とおき解が次式で与えられるとする。

$$y(x, t) = \phi(t) \cos \frac{n\pi x}{l} \quad (\text{A2.5.2})$$

(A2.5.1)式に(A2.5.2)式を代入すると ϕ に関して次式が求められる。

$$\ddot{\phi} + \omega_n^2 \phi = 0 \quad (\text{A2.5.3})$$

ここで、 ω_n は次の関係を満足する。

$$\omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (\text{A2.5.4})$$

したがって(A2.5.3)式の解は次のとおりとなる。

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \cos \frac{n\pi}{l} x \cdot \cos \omega_n t \\ &\sim \cos \frac{n\pi}{l} (x - v_n t) \end{aligned} \quad (\text{A2.5.5})$$

ここで

$$v_n = \frac{\omega_n}{\frac{n\pi}{l}} = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (\text{A2.5.6})$$

固有周期 T_n は

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad (\text{A2.5.7})$$

であるから一周期間に波の進む距離 l_n はビームの長さ l と節数 n の間に次の関係式が有することとなる。

$$l_n = v_n T_n = \frac{\omega_n}{n\pi} \cdot \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2l}{n} \quad (\text{A2.5.8})$$

このことは長さ l のビームの場合、1 波長が節数の増加に逆比例することを意味する。

また波動が $x=0$ から発し、他端 $x=l$ で反射後 $x=0$ に戻ってくるまでに要する時間 T は次のようになる。

$$T = \frac{2l}{v_n} = \frac{2l}{\frac{l\omega_n}{n\pi}} = n \frac{2\pi}{\omega_n} = nT_n \quad (\text{A2.5.9})$$

すなわち n 節振動の場合、往復に要する時間 T_n の n 倍となる。

2. 構造減衰を考慮した場合の振動応答特性

付録 2.3 に示した構造減衰を考慮した場合のビーム曲げ振動方程式は次のとおりである。

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI(1+i\gamma) \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = F(x,t) \quad (\text{A2.5.10})$$

今長さ l のビームを考え、 $x=0$ に集中起振力

$$F(x,t) = f_0 \delta(x) e^{i\omega t} \quad (\text{A2.5.11})$$

が働く場合について考える。ここで $\delta(x)$ はディラックのデルタ関数である。振動の解が (A2.5.2) で与えられると仮定し、(A2.5.10) に代入する。

$$\left\{ \ddot{\phi} + \omega_n^2 (1+i\gamma) \phi \right\} \cos \frac{n\pi x}{l} = \frac{f_0}{m} \delta(x) e^{i\omega t} \quad (\text{A2.5.12})$$

(A2.5.12) 式の両辺に $\cos \frac{n\pi x}{l}$ を掛け、ビーム間で積分すると次の関係式が求められる。

$$\ddot{\phi} + \omega_n^2 (1+i\gamma) \phi = \frac{2f_0}{ml} e^{i\omega t} \quad (\text{A2.5.13})$$

(1) 同次方程式の解

$$\phi = e^{(-\alpha + \beta i)t} \quad (\text{A2.5.14})$$

とおき (A2.5.13) 式左辺に代入すると次の関係式が求められる。

$$\left. \begin{array}{l} (-\alpha + \beta i)^2 + \omega_n^2 (1 + i\gamma) = 0 \\ \text{実数項} \quad \alpha^2 - \beta^2 + \omega_n^2 = 0 \\ \text{虚数項} \quad -2\alpha\beta + \gamma\omega_n^2 = 0 \end{array} \right\} \quad (\text{A2.5.15})$$

この場合 α, β は次のように与えられる。

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \doteq \frac{\gamma}{2} \omega_n \\ \beta \doteq \omega_n \end{array} \right\} \quad (\text{A2.5.16})$$

(2) 強制振動

$$\phi = Ae^{i\omega t} \quad (\text{A2.5.17})$$

を (A2.5.13) 式に代入することにより A は次式を満足する。

$$A = \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2 + i\gamma\omega_n^2} \cdot \frac{f_0}{M} \quad (\text{A2.5.18})$$

ここで M は次式で与えられる。

$$M = \frac{ml}{2} \quad (\text{A2.5.19})$$

(3) 振動解

以上より振動解は次のように与えられる。

$$\phi(t) = \phi_0 e^{\left(\frac{\gamma}{2} + i\right)\omega_n t} + \frac{f_0}{M} \cdot \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2 + i\gamma\omega_n^2} e^{i\omega t} \quad (\text{A2.5.20})$$

初期条件として $t=0$ で $\phi(t)=0$ とすると $\phi(t)$ は次のように整理できる。

$$\phi(t) = \frac{f_0}{M} \cdot \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2 + i\gamma\omega_n^2} \left(e^{i\omega t} - e^{\left(\frac{\gamma}{2} + i\right)\omega_n t} \right) \quad (\text{A2.5.21})$$

同調時すなわち $\omega = \omega_n$ のとき $\phi(t)$ は次のようになる。

$$\phi(t) = \frac{f_0}{M} \cdot \frac{1}{i\gamma\omega_n^2} e^{i\omega_n t} \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{2}\omega_n t} \right) \quad (\text{A2.5.22})$$

今

$$M\omega_n^2 = \frac{ml}{2} \cdot \frac{(n\pi)^4}{l^4} \cdot \frac{EI}{m} = \frac{(n\pi)^4}{2} \cdot \frac{EI}{l^3} = k_n [\text{N/m}] \quad (\text{A2.5.23})$$

であり $M\omega_n^2$ は等価なバネ k_n に等しい。したがって等価な静たわみ $\delta_{st \cdot n}$ は次のように与えられる。

$$\delta_{st \cdot n} = \frac{f_0}{k_n} \quad (\text{A2.5.24})$$

(A2.5.22)式において

$$t = \frac{2\pi}{\omega_n} \cdot m \quad (m=0,1,2,\dots) \quad (\text{A2.5.25})$$

とおくと $\phi(t)$ は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \phi\left(\frac{2\pi}{\omega_n} \cdot m\right) = -i \frac{\delta_{st \cdot n}}{\gamma} (1 - e^{-\pi\gamma \cdot m}) \\ &= -i \frac{\delta_{st \cdot n}}{\gamma} (1 - e^{-\pi\gamma}) \sum_{m=0}^{m-1} (e^{-\pi\gamma})^m \\ &= -i\pi\delta_{st \cdot n} \sum_{m=0}^{m-1} (e^{-\pi\gamma})^m \end{aligned} \quad (\text{A2.5.26})$$

(A2.5.26)式は過去の 1 周期毎の波頂の和が共振時の応答を示すことを意味している (Fig.A2.5.1)。

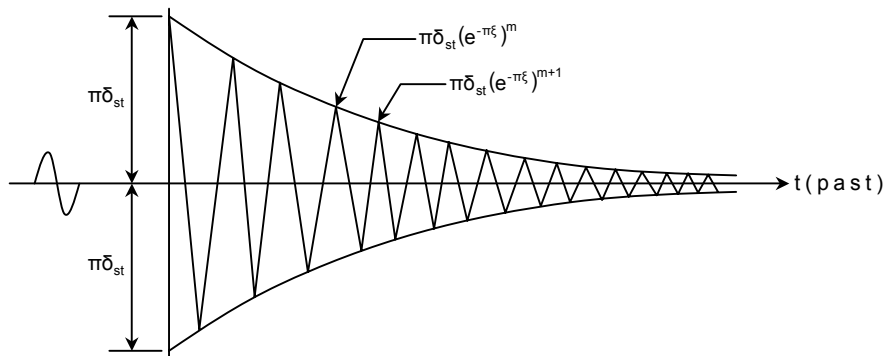


Fig.A2.5.1 Damping of vibration wave

すなわちビームに関していえば (A2.5.8) 式に示したように、1 節振

動のときに 1 周期毎に波動は原点に復帰するので (A2.4.10) 式は 1 節振動に対応した振動方程式に一致する。

3. n 節振動の場合の振動方程式

n 節振動の場合に対応する振動方程式として次式を考察してみる。

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI(1 + in\gamma) \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = F(x, t) \quad (\text{A2.5.27})$$

2. と同様な方法で $\phi(t)$ に関する方程式は次のように与えられる。

$$\ddot{\phi} + \omega_n^2(1 + in\gamma)\phi = \frac{f_0}{M} e^{i\omega t} \quad (\text{A2.5.28})$$

(A2.5.14) 式の関数を仮定すると α 、 β は次のように近似できる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha &\doteq \frac{n\gamma}{2} \omega_n \\ \beta &\doteq \omega_n \end{aligned} \right\} \quad (\text{A2.5.29})$$

以降 2. と同様な方法で展開すると $\phi(t)$ は次式として与えられる。

$$\phi(t) = \frac{f_0}{M} \cdot \frac{1}{in\gamma\omega_n^2} e^{i\omega_n t} \left(1 - e^{-\frac{n\gamma}{2}\omega_n t} \right) \quad (\text{A2.5.30})$$

今、

$$t = \frac{2\pi}{\omega_n} \cdot m \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

を (A2.5.30) 式に代入すると $\phi(t)$ は次のように表現できる。

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \phi\left(\frac{2\pi}{\omega_n} \cdot m\right) = -i \frac{\delta_{st \cdot n}}{n\gamma} \left(1 - e^{-n\pi\gamma \cdot m}\right) \\ &= -i \frac{\delta_{st \cdot n}}{n\gamma} \left(1 - e^{-n\pi\gamma}\right) \sum_{m=0}^{m-1} \left(e^{-n\pi\gamma}\right)^m \\ &= -i\pi\delta_{st \cdot n} \sum_{m=0}^{m-1} \left(e^{-n\pi\gamma}\right)^m \end{aligned} \quad (\text{A2.5.31})$$

(A2.5.31) 式は n 波毎の変位の和で共振時変位が与えられることを意味する。1. で述べたように n 節振動の場合波動が距離 $2l$ をたどって原点 (起振源) に戻ってきて重畳されるのは nT_n 毎である。

したがって (A2.5.27) は n 節振動の場合の振動方程式に対応している。すなわち n 節振動の場合は (A2.5.27) 式を用いられなければならない。

付録 2.6 曲げ、剪断変形、回転慣性および構造減衰を考慮した
振動方程式の導出

ビームに働く曲げモーメント M および剪断力 Q は次式で与えられる。

$$M = -EI(1 + in\gamma_b) \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (\text{A2.6.1})$$

$$Q = k'GA(1 + in\gamma_s) \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \psi \right) \quad (\text{A2.6.2})$$

ここで EI : 曲げ剛性 [$\text{N} \cdot \text{m}^2$]

$k'GA$: 剪断剛性 [N]

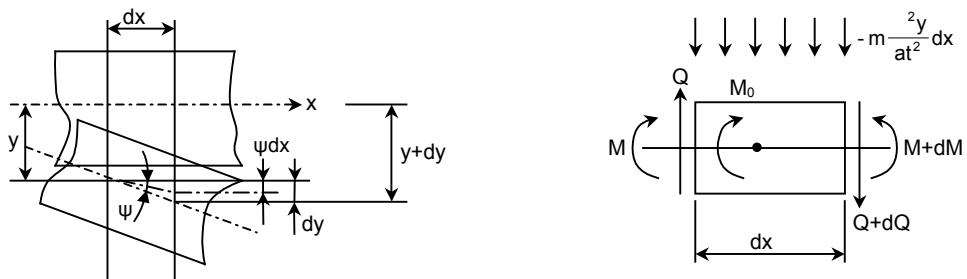
γ_b : 曲げ変形に対する構造減衰係数[無次元]

γ_s : 剪断変形に対する構造減衰係数[無次元]

$y(x, t)$: ビームのたわみ量 [m]

$\psi(x, t)$: 曲げによる回転角 [無次元]

曲げモーメント M 、剪断力 Q の正方向、 $y(x, t)$ と $\psi(x, t)$ の関係を
Fig.A2.6.1 に示す。



(a) Expression of y and ψ

(b) Positive direction of M and Q

Fig.A2.6.1 Schematic expression of deformation
and balance between moment and shearing force

1. モーメントのつり合い

ビーム断面の回転半径を r とし、ダランベールの原理を回転慣

性に適用するときモーメントのバランスは次式を満足しなければならない（Fig.A2.6.1(b)参照）。

$$M + Qdx + M_0 = M + dM$$

ここで M_0 は断面の回転による慣性モーメントで次式により与えられる。

$$M_0 = -\frac{w}{g} r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dx \quad (\text{A2.6.3})$$

ただし、 r ：断面の回転慣性半径[m]

したがってモーメントと剪断力および回転慣性間の満足すべき関係は次式を満足する。

$$-\frac{\partial M}{\partial x} + Q = m r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (\text{A2.6.4})$$

ここで m ：単位長さ当たりのビームの質量 $[\text{kg} \cdot \text{m}^{-1}]$

2. 上下方向の力のつり合い

Fig.A2.6.1(b)を参考にすると次式が与えられる。

$$Q + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx = Q + dQ$$

したがって Q の満足すべき関係は次式のようになる。

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (\text{A2.6.5})$$

(A2.6.4)式に(A2.6.1)式,(A2.6.2)式を代入すると次式が与えられる。

$$EI(1 + in\gamma_b) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k'GA(1 + in\gamma_s) \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \psi \right) - mr^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{A2.6.6})$$

(A2.6.6)式を y と ψ について分離して表現すると次式となる。

$$\left[k'GA(1 + in\gamma_s) \frac{\partial}{\partial x} \right] y + \left[EI(1 + in\gamma_b) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - k'GA(1 + in\gamma_s) - mr^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \psi = 0 \quad (\text{A2.6.7})$$

(A2.6.5)式に(A2.6.2)式を代入し y と ψ に関して整理する。

$$k'GA(1 + in\gamma_s) \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

より次式が求められる。

$$\left[k'GA(1 + in\gamma_s) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] y - \left[k'GA(1 + in\gamma_s) \frac{\partial}{\partial x} \right] \psi = 0 \quad (\text{A2.6.8})$$

3. 振動方程式の導出

微分演算子を次のようにおく。

$$\left. \begin{aligned} L_{11} &= L_{22} = k'GA(1 + in\gamma_s) \frac{\partial}{\partial x} \\ L_{12} &= EI(1 + in\gamma_b) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - k'GA(1 + in\gamma_s) - mr^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \\ L_{21} &= k'GA(1 + in\gamma_s) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A2.6.9})$$

(A2.6.7)式と(A2.6.8)式を微分演算子により表すと次の関係式が与えられる。

$$\left. \begin{aligned} L_{11}y + L_{12}\psi &= 0 \\ L_{21}y - L_{22}\psi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A2.6.10})$$

(A2.6.10)式より次の微分演算子を得る。

$$\left. \begin{aligned} L &= L_{11}L_{22} + L_{12}L_{21} \\ Ly &= 0 \\ L\psi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A2.6.11})$$

微分演算子 L は (A2.6.9) を代入することにより、

$$\begin{aligned} L = k'GA \cdot L' &= EI \{1 + in(\gamma_b + \gamma_s)\} \frac{\partial^4}{\partial x^4} \\ &\quad - m \left\{ \frac{EI}{k'GA} (1 + in\gamma_b) + r^2 (1 + in\gamma_s) \right\} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} \\ &\quad + m(1 + in\gamma_s) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{m^2 r^2}{k'GA} \frac{\partial^4}{\partial t^4} \end{aligned} \quad (\text{A2.6.12})$$

が得られる。

付録 2.7 高次振動における円固有振動数 ω_n と減衰係数 ε_n

付録 2.6 において曲げ、剪断変形および回転慣性の影響を考慮した振動方程式が導かれた。この方程式を用いて円固有振動数 ω_n と構造減衰率 ε_n を求める。

付録 2.6 より振動方程式は次のように与えられる。

$$EI\{1+in(\gamma_b+\gamma_s)\}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}-m\left\{\frac{EI}{k'GA}(1+in\gamma_b)+r^2(1+in\gamma_s)\right\}\frac{\partial^4 y}{\partial x^2\partial t^2}+m(1+in\gamma_s)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\frac{m^2 r^2}{k'GA}\frac{\partial^4 y}{\partial t^4}=0 \quad (\text{A2.7.1})$$

ここで EI : 曲げ剛性 $[\text{N}\cdot\text{m}^2]$

$k'GA$: 剪断剛性 $[\text{N}]$

γ_b : 曲げ変形に対する構造減衰係数[無次元]

γ_s : 剪断変形に対する構造減衰係数[無次元]

$y(x,t)$: ビームのたわみ量 $[\text{m}]$

$\psi(x,t)$: ビームの回転角 $[\text{無次元}]$

m : 単位長さ当たりの質量 $[\text{kg}/\text{m}]$

r : 断面の回転半径 $[\text{m}]$

(A2.7.1)式に次の変位式 $y(x,t)$ を代入する。

$$y(x,t)=y_n\cos\frac{\lambda_n}{l}x\cdot e^{(i\omega_n-\varepsilon_n)t} \quad (\text{A2.7.2})$$

ここで $\lambda_n=n\pi$

このとき満足すべき関係式は次のように導かれる。

$$EI\{1+in(\gamma_b+\gamma_s)\}\frac{\lambda_n^4}{l^4}+m\left\{\frac{EI}{k'GA}(1+in\gamma_b)+r^2(1+in\gamma_s)\right\}\frac{\lambda_n^2}{l^2}(i\omega_n-\varepsilon_n)^2+m(1+in\gamma_s)(i\omega_n-\varepsilon_n)^2+\frac{m^2 r^2}{k'GA}(i\omega_n-\varepsilon_n)^4=0 \quad (\text{A2.7.3})$$

与えられる。ここで(A2.7.3)式の第4項は微小量であり無視する。

今無次元係数 α, β を次のように与える。

$$\alpha=\frac{EI}{k'GA l^2} \quad \beta=\frac{r^2}{l^2} \quad (\text{A2.7.4})$$

(A2.7.4)式を(A2.7.3)式に代入し ε_n に関する高次項を無視すると、次の関係式を満足しなければならない。

$$EI\left\{1+in(\gamma_b+\gamma_s)\right\}\frac{\lambda_n^4}{l^4}+m\{\alpha(1+in\gamma_b)+\beta(1+in\gamma_s)\}\lambda_n^2(\omega_n^2+2i\omega_n\varepsilon_n) -m(1+in\gamma_s)(\omega_n^2+2i\omega_n\varepsilon_n)=0 \quad (\text{A2.7.5})$$

(A2.7.5)式を実数項と虚数項に分け、高次の微小量を無視して各々を0とおく。

実数項は次のように与えられる。

$$\frac{\lambda_n^4}{l^4}EI-m(\alpha+\beta)\lambda_n^2\omega_n^2-m\omega_n^2=0 \quad (\text{A2.7.6})$$

したがって ω_n は

$$\omega_n=\frac{\lambda_n^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m\{1+(\alpha+\beta)\lambda_n^2\}}} \quad (\text{A2.7.7})$$

と与えられる。

虚数項は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} &EI n(\gamma_b+\gamma_s)\frac{\lambda_n^4}{l^4}-m\cdot n(\alpha\gamma_b+\beta\gamma_s)\lambda_n^2\omega_n^2-2m(\alpha+\beta)\lambda_n^2\omega_n\varepsilon_n \\ &\quad -m\cdot n\cdot\gamma_s\cdot\omega_n^2-2m\omega_n\varepsilon_n \\ &=EI n(\gamma_b+\gamma_s)\frac{\lambda_n^4}{l^4}-2m\varepsilon_n\{1+(\alpha+\beta)\lambda_n^2\}\omega_n-m\cdot n\{\gamma_s+(\alpha\gamma_b+\beta\gamma_s)\lambda_n^2\}\omega_n^2 \\ &=0 \end{aligned} \quad (\text{A2.7.8})$$

(A2.7.8)を整理すると ε_n は

$$\varepsilon_n=\frac{n}{2}\cdot\frac{\gamma_b+(\alpha\gamma_s+\beta\gamma_b)\lambda_n^2}{1+(\alpha+\beta)\lambda_n^2}\omega_n \quad (\text{A2.7.9})$$

と与えられる。

対数減衰率 δ は

$$\delta=\ln\frac{e^{-\varepsilon_n t}}{e^{-\varepsilon_n\left(t+\frac{2\pi}{\omega_n}\right)}}=\pi n\left\{\frac{\gamma_b+(\alpha\gamma_s+\beta\gamma_b)\lambda_n^2}{1+(\alpha+\beta)\lambda_n^2}\right\} \quad (\text{A2.7.10})$$

となる。

(A2.7.10)式中の λ_n は n に比例して変化するので、剪断変形および回転慣性を考慮した場合の対数減衰率は n に正比例するのではなく

$\alpha, \beta, \gamma_b, \gamma_s$ の値によっては傾向が変化する。

γ_b と γ_s 間に微小要素のつり合いより次の関係が見出される。

$$\gamma_s = (1 + \nu) \gamma_b \quad (\text{A2.7.11})$$

(A2.7.11) 式を (A2.7.10) 式に代入することにより対数減衰率 δ_n は次のように与えられることになる。

$$\delta_n = \pi \gamma_b \left\{ 1 + \frac{\alpha \nu \lambda_n^2}{1 + (\alpha + \beta) \lambda_n^2} \right\} \quad (\text{A2.7.12})$$

ここで ν : ポアソン比 (=0.3)

付録 3.1 断面が剛体運動する有限長さビームの曲げ振動における三次元付加質量

主題については熊井 [17] [18] により説明されているが，誤殖と論理の明証性に欠けるため，本付録において論理的に一貫性をもった整理を行う。

A3.1.1 船体断面の Lewis 変換による近似

Lewis は半径 1 の単位円を 3 個のパラメータを用いて船体の断面形状を近似する方法を与えた。

船体の形状は複雑であるが，Fig.A3.1.1 に示すように水表面部半幅 b ，吃水 d および没水部半幅分断面積 S の 3 個と関連づけ，単位円を船体形状に写像する。

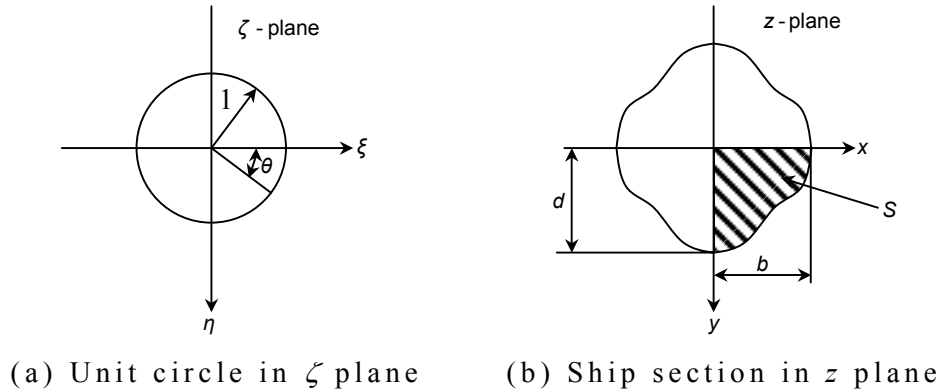


Fig.A3.1.1 Mapping of unit circle to ship section

この場合 ζ と z の関係を未定のパラメータ a_1, a_3, b_0 を用いて次式で与える。

$$\left. \begin{aligned}
 z &= b_0 \left(\zeta + \frac{a_1}{\zeta} + \frac{a_3}{\zeta^3} \right) \\
 x &= b_0 \left\{ \left(e^\alpha + a_1 e^{-\alpha} \right) \cos \theta + a_3 e^{-3\alpha} \cos 3\theta \right\} \\
 y &= b_0 \left\{ \left(e^\alpha - a_1 e^{-\alpha} \right) \sin \theta - a_3 e^{-3\alpha} \sin 3\theta \right\} \\
 \text{ここで } \zeta &= e^\alpha e^{i\theta} \quad (\alpha \geq 0)
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A3.1.1})$$

この場合，船体断面の座標は $\alpha=0$ として次式で与えられる。

$$x = b_0 \{ (1 + a_1) \cos \theta + a_3 \cos 3\theta \} \quad (\text{A3.1.2})$$

$$y = b_0 \{ (1 - a_1) \sin \theta - a_3 \sin 3\theta \} \quad (\text{A3.1.3})$$

今船体断面の吃水と半幅の比 λ ，面積比を σ としたとき次の関係を有する。

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{d}{b} \\ \sigma &= \frac{S}{bd} \\ \xi &= \frac{b_0}{b} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A3.1.4})$$

ここで S は Fig.A3.1.1 に示すように船の半幅あたりの没水断面積である。 λ と σ は船の断面形状が決まれば自動的に決まる既知数であるが， ξ は未定である。

以下 a_1, a_3, ξ の決定法について記述する。

船の半幅 b は $\theta=0$ を (A3.1.2) 式に代入することにより次のように与えることができる。

$$b = b_0 (1 + a_1 + a_3) \quad (\text{A3.1.5})$$

同様に吃水 d は $\theta = \frac{\pi}{2}$ を (A3.1.3) 式に代入して

$$d = b_0 (1 - a_1 + a_3) \quad (\text{A3.1.6})$$

が導かれる。したがって λ は

$$\lambda = \frac{d}{b} = \frac{1 - a_1 + a_3}{1 + a_1 + a_3} \quad (\text{A3.1.7})$$

(A3.1.7) 式より

$$a_1 (1 + \lambda) - a_3 (1 - \lambda) = 1 - \lambda \quad (\text{A3.1.8})$$

の関係が導かれ，(A3.1.5) 式より

$$a_1 + a_3 = \frac{1}{\xi} - 1 \quad (\text{A3.1.9})$$

(A3.1.8)式および (A3.1.9)式を解くと a_1, a_3 は λ と ξ に関して次式で与えることができる。

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{1-\lambda}{2\xi} \\ a_3 &= \frac{1+\lambda}{2\xi} - 1 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A3.1.10})$$

Lewis 断面の面積 S は (A3.1.2)式, (A3.1.3)式を用いて次のように計算できる。

$$\begin{aligned} S &= \int_0^b y dx \\ &= b_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{ (1-a_1) \sin \theta - a_3 \sin 3\theta \} \{ (1+a_1) \sin \theta + 3a_3 \sin 3\theta \} d\theta \\ &= b_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{ (1-a_1^2) \sin^2 \theta + 2a_3(1-2a_1) \sin \theta \sin 3\theta - 3a_3^2 \sin^2 3\theta \} d\theta \\ &= \frac{\pi}{4} b_0^2 (1-a_1^2 - 3a_3^2) \end{aligned} \quad (\text{A3.1.11})$$

したがって σ は

$$\sigma = \frac{S}{bd} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{b_0}{b} \right)^2 \frac{1-a_1^2 - 3a_3^2}{\lambda} \quad (\text{A3.1.12})$$

と表される。

(A3.1.12)式に (A3.1.10)式の関係代入し整理すれば次の関係を有する。

$$\begin{aligned} \frac{4\sigma}{\pi} \lambda &= \xi^2 \left[1 - \frac{(1-\lambda)^2}{4\xi^2} - \frac{3\{(1+\lambda)-2\xi\}^2}{4\xi^2} \right] \\ &= \xi^2 - (1+\lambda+\lambda^2) + 3(1+\lambda)\xi - 3\xi^2 \end{aligned} \quad (\text{A3.1.13})$$

(A3.1.13)式より ξ は次のように与えられる。

$$\xi = \frac{3(1+\lambda) \pm \sqrt{(1+\lambda)^2 + 8\lambda \left(1 - \frac{4}{\pi} \sigma \right)}}{4} \quad (\text{A3.1.14})$$

なお ξ 中の符号 \pm については負号のみが有効であることを付録 A3.2 に証明してある。 ξ の値は λ, σ により決定できるのでこの ξ を用いることにより (A3.1.10)式より a_1, a_3 が確定する。なお a_1, a_3

については写像上の問題から値に制限が認められる。その制限についても付録 A3.2 に記述してある。

A3.1.2 Lewis 断面の二次元付加質量

(1) 自由表面条件

自由表面を有する水面では物体の上下運動により波が生じる。流体の速度ポテンシャルを $\phi(x,y,z,t)$ とおき, Fig.A3.1.2 に示すように座標をとる。

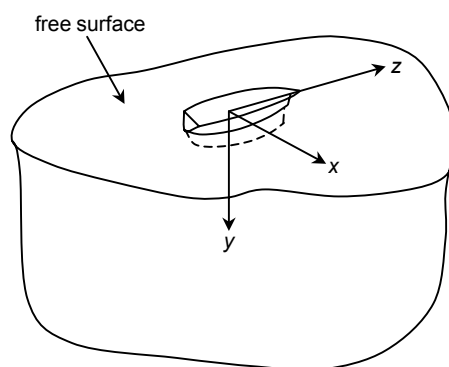


Fig.A3.1.2 Coordinate system of ship and water

このとき自由表面条件は次式で与えられる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad (\text{at } y=0) \quad (\text{A3.1.15})$$

今時間の周期性を有する振動を問題としているので $\phi(x,y,z,t)$ を次のようにおく。

$$\phi(x,y,z,t) = \phi(x,y,z)e^{i\omega t} \quad (\text{A3.1.16})$$

(A3.1.16)式を (A3.1.15)式に代入すると

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - K\phi = 0 \quad \left(K = \frac{\omega^2}{g} \right) \quad (\text{A3.1.17})$$

のように自由表面条件が与えられる。振動における振幅は非常に小さく y 方向の速度すなわち上下振動は小さい一方、円振動数 ω は大きいので、振動問題においては (A3.1.17)式より

$$\phi = 0 \quad (\text{at } y=0) \quad (\text{A3.1.18})$$

を自由表面における境界条件とする。すなわち $x=0$ に関して逆鏡像関係を有することになる。このため Fig.A3.1.1 に示すような x,y 平面における無限流体中で船体を x 軸に対して対称の形に仮定し

て計算を行うことが可能となる。

(2) 二次元流場における速度ポテンシャル ϕ および流れ関数 ψ

Fig.A3.1.3 に示すような単位円静止無限円柱に対し η の負方向に v の流速が働くときの複素関数 $F_0(\zeta)$ は次式で与えられる。

$$F_0(\zeta) = v \left(i\zeta - \frac{i}{\zeta} \right) \quad (\text{A3.1.19})$$

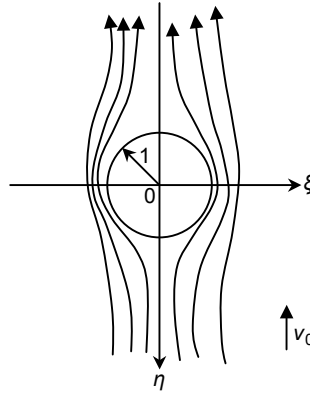


Fig.A3.1.3 Two dimensional flow around unit circular body

Lewis 変換された船体断面について y の負方向に v の流速が働くときについても，上述のアナロジーから，複素関数 $F_1(\zeta)$ として次式を仮定する。

$$F_1(\zeta) = \beta v_0 \left(i\zeta - \frac{i}{\zeta} \right) \quad (\text{A3.1.20})$$

この場合， $F_1(\zeta)$ を z によって微分することにより z 平面での速度場を求める。このとき (A3.1.1) 式に与える z と ζ の関係式を用いる。

$$\begin{aligned} \frac{dF_1}{dz} &= \frac{dF_1}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz} \\ &= u - iv \\ &= \beta v_0 \left(i + \frac{i}{\zeta^2} \right) \Bigg/ b_0 \left(1 - \frac{a_1}{\zeta^2} - \frac{3a_3}{\zeta^4} \right) \end{aligned} \quad (\text{A3.1.21})$$

(A3.1.21) 式において $|\zeta| \rightarrow \infty$ とおくと

$$u - iv \rightarrow \frac{\beta}{b_0} v_0 i \quad (\text{A3.1.22})$$

すなわち $u=0, v=-\frac{\beta}{b_0} v_0$ が与えられる。 $|\zeta| \rightarrow \infty$ で $v=-v_0$ でなければなら
ないから， β は次式を満足する。

$$\beta = b_0 \quad (\text{A3.1.23})$$

すなわち

$$\begin{aligned} F_1(\zeta) &= b_0 v_0 \left(i\zeta - \frac{i}{\zeta} \right) \\ &= \phi_1 + i\psi_1 \end{aligned} \quad (\text{A3.1.24})$$

$\zeta = e^\alpha e^{i\theta}$ を (A3.1.24) 式に代入して整理すると

$$\begin{cases} \phi_1 = -b_0 v_0 (e^\alpha + e^{-\alpha}) \sin \theta \\ \psi_1 = b_0 v_0 (e^\alpha - e^{-\alpha}) \cos \theta \end{cases} \quad (\text{A3.1.25})$$

静止した流体中を Lewis 断面が y 方向に v_0 の速度で運動する場合
には複素関数 F_1 に y 方向へ v_0 の一様流場を加えることにより実
現できるから，このときの複素関数を $F_2(z)$ とすると

$$F_2(z) = -iv_0 z = \phi_2 + i\psi_2 \quad (\text{A3.1.26})$$

となる。このとき (A3.1.1) 式の関係を用いれば

$$\begin{cases} \phi_2 = v_0 y = b_0 v_0 \left\{ (e^\alpha - a_1 e^{-\alpha}) \sin \theta - a_3 e^{-3\alpha} \sin 3\theta \right\} \\ \psi_2 = -v_0 x = -b_0 v_0 \left\{ (e^\alpha + a_1 e^{-\alpha}) \cos \theta + a_3 e^{-3\alpha} \cos 3\theta \right\} \end{cases} \quad (\text{A3.1.27})$$

統合された速度ポテンシャル ϕ と流れ関数 ψ は (A3.1.25) 式およ
び (A3.1.27) 式より

$$\begin{cases} \phi = \phi_1 + \phi_2 = -b_0 v_0 \left\{ e^{-\alpha} (1 + a_1) \sin \theta + a_3 e^{-3\alpha} \sin 3\theta \right\} \\ \psi = \psi_1 + \psi_2 = -b_0 v_0 \left\{ e^{-\alpha} (1 + a_1) \cos \theta + a_3 e^{-3\alpha} \cos 3\theta \right\} \end{cases} \quad (\text{A3.1.28})$$

と与えられることになる。

(3) 二次元付加質量係数

y 方向に速度 v_0 で運動する物体が流体に与える運動エネルギー T は

$$T = \frac{1}{2} \rho \oint_s \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} ds \quad (\text{A3.1.29})$$

で与えられる。ここで \oint_s は断面まわりの積分， n は断面に内向き垂直にとり ds は断面の周辺要素である（Fig.A3.1.4 参照）。

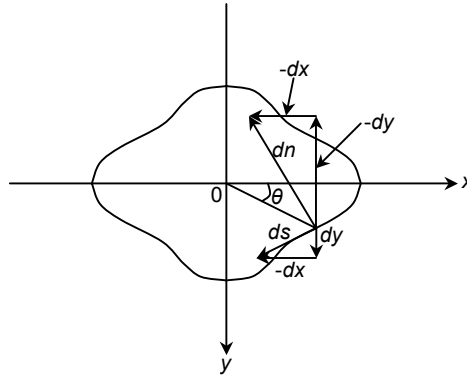


Fig.A3.1.4 Definition of ds and dn

$\frac{\partial \phi}{\partial n}$ は Cauchy-Riemann の関係と Fig.A3.1.4 を用いて ψ と間の次の関係を有する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial n} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial n} \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \left(-\frac{\partial y}{\partial s} \right) + \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial n}{\partial s} \right) = \frac{\partial \psi}{\partial s} \end{aligned} \quad (\text{A3.1.30})$$

(A3.1.30)式を (A3.1.29)式に代入すると T は ϕ と ψ に関して次の関係を与える。

$$T = \frac{1}{2} \rho \oint_s \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} ds = -\frac{1}{2} \oint_s \phi d\psi = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \phi \frac{\partial \psi}{\partial \theta} d\theta \quad (\text{A3.1.31})$$

(A3.1.31)式に (A3.1.28)式において $\alpha=0$ （断面上）の場合を代入すると

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \rho b_0^2 v_0^2 \int_0^{2\pi} \{ (1+a_1) \sin \theta + a_3 \sin 3\theta \} \{ (1+a_1) \sin \theta + 3a_3 \sin 3\theta \} d\theta \\
&= \frac{1}{2} \rho b_0^2 v_0^2 \{ (1+a_1)^2 + 3a_3^2 \}
\end{aligned} \tag{A3.1.32}$$

として T が求められる。

速度 v_0 で運動する半径 b の円柱による流体場に与える運動エネルギー T_0 は次のように与えられる。

$$T_0 = \frac{1}{2} \rho \pi b^2 v_0^2 \tag{A3.1.33}$$

Lewis 断面の場合における運動エネルギー T と T_0 の比をもって二次元付加質量係数 C_{2V} を定義する。このとき (A3.1.5) 式に与える b を用いると C_{2V} は

$$\begin{aligned}
C_{2V} &= \frac{T}{T_0} = \frac{\frac{1}{2} \rho b_0^2 v_0^2 \{ (1+a_1)^2 + 3a_3^2 \}}{\frac{1}{2} \rho \pi b^2 v_0^2} \\
&= \frac{(1+a_1)^2 + 3a_3^2}{(1+a_1+a_3)^2}
\end{aligned} \tag{A3.1.34}$$

により求められることになる。

A3.1.3 有限長さ Lewis 断面の曲げ振動時三次元付加質量

(1) Bessel 関数展開

三次元空間を円筒座標系で表示する (Fig.A3.1.5 参照)。

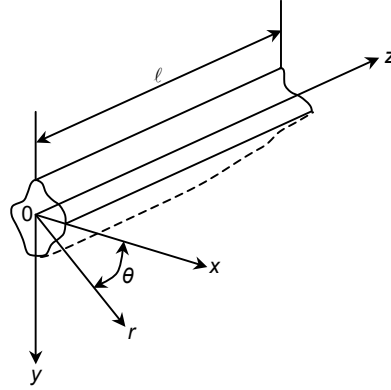


Fig.A3.1.5 Cylindrical coordinate system

このとき速度ポテンシャル ϕ のラプラス方程式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{A3.1.35})$$

今速度ポテンシャル $\phi(r, \theta, z, t)$ を次のように変数分離形と仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \phi(r, \theta, z, t) &= R(r)\Theta(\theta)Z(z)\cos\omega t \\ \Theta(\theta) &= e^{is\theta} \\ Z(z) &= e^{ik_m z} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A3.1.36})$$

$$\text{ここで} \quad k_m = \frac{m\pi}{\ell}$$

(A3.1.36)式を (A3.1.35)式に代入して整理すると $R(r)$ に関して次の微分方程式が導かれる。

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \left(k_m^2 + \frac{s^2}{r^2} \right) R = 0 \quad (\text{A3.1.37})$$

(A3.1.37)式の解は次のように与えられる。

$$R(r) = C_1 I_s(k_m r) + C_2 K_s(k_m r) \quad (\text{A3.1.38})$$

ここで $I_s(k_m r)$: 第 1 種変形ベッセル関数

$K_s(k_m r)$: 第 2 種変形ベッセル関数

$r \rightarrow \infty$ で $R(r) \rightarrow 0$ とならなければならないので (A3.1.38) 式の中の係数 $C_1 = 0$ となる。したがって速度ポテンシャル $\phi(r, \theta, z, t)$ は

$$\phi(r, \theta, z, t) = v_0 A_s K_s(k_m r) \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} (s\theta) \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} (k_m z) \cos \omega t \quad (\text{A3.1.39})$$

と表現される。

今ビームの長さを ℓ としたとき ℓ 間における振動モードを $\cos \frac{n\pi z}{\ell}$ で与えるとする。このとき有限長さ ℓ が付加質量効果に与える影響を考慮するため Fig.A3.1.6 に示すようなモード関数 $\frac{n\pi z}{\ell}$ のフーリエ sine 展開を考える。

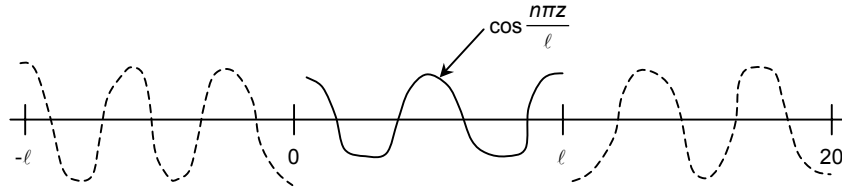


Fig.A3.1.6 Fourier sine series for $\cos \frac{n\pi z}{\ell}$

このとき $\cos \frac{n\pi z}{\ell}$ は sin 関数によって次のように与えられる。

$$\cos \frac{m\pi z}{\ell} = \frac{4}{\pi} \sum_m \frac{m}{m^2 - n^2} \sin k_m z \quad (\text{A3.1.40})$$

ここで $n = \text{偶数モードの時}$ $m = 1, 3, 5, \dots$

$n = \text{奇数モードの時}$ $m = 2, 4, 6, \dots$

をとる。このように与えられる理由については付録 A3.3 に述べてある。

(A3.1.39)式において $\theta=0$ の逆鏡像の関係と振動モードのフーリエ sine 展開を考慮することにより ϕ は次のように与えられる。

$$\phi(r, \theta, z, t) = v_0 A_s K_s(k_m r) \sin s \theta \cdot \frac{4}{\pi} \sum_m \frac{m}{m^2 - n^2} \sin k_m z \cdot \cos \omega t \quad (\text{A3.1.41})$$

r 方向の速度は $\frac{\partial \phi}{\partial r}$ で与えられる。この $\frac{\partial \phi}{\partial r}$ は (A3.1.41) 式により次のように展開できる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = v_0 A_s \frac{dK_s(k_m r)}{dr} \sin s \theta \cdot \frac{4}{\pi} \sum_m \frac{m}{m^2 - n^2} \sin k_m z \cdot \cos \omega t \quad (\text{A3.1.42})$$

一般に次式の関係をもつ (岩波数学公式 III, p174)。

$$ZK'_s(z) + sK_s(z) = -ZK_{s-1}(z) \quad (\text{A3.1.43})$$

(A3.1.43) 式に $z = k_m r$ の関係を代入すると

$$k_m r \cdot \frac{dk_s(k_m r)}{k_m dr} = -sK_s(k_m r) - k_m r K_{s-1}(k_m r) \quad (\text{A3.1.43}')$$

と表すことができる。

したがって (A3.1.42) 式は (A3.1.43') 式を用いることにより次のように与えられる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{v_0 A_s}{r} \{sK_s(k_m r) + k_m r \cdot K_{s-1}(k_m r)\} \sin s \theta \cdot \frac{4}{\pi} \sum_m \frac{m}{m^2 - n^2} \sin k_m z \cos \omega t \quad (\text{A3.1.44})$$

(2) 速度ポテンシャル $\phi(r, \theta, z, t)$

(A3.1.1) 式より y は次のように与えられている。

$$y = b_0 \{ (e^\alpha - a_1 e^{-\alpha}) \sin \theta - a_3 e^{-3\alpha} \sin \theta \}$$

今

$$r = b_0 e^\alpha \quad (\text{A3.1.45})$$

とおき y を r に関して微分すると

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial y}{b_0 e^\alpha \partial \alpha} = \frac{(e^\alpha + a_1 e^{-\alpha}) \sin \theta + 3a_3 \sin 3\theta}{e^\alpha} \quad (\text{A3.1.46})$$

r 方向の速度 v_r は Fig.A3.1.7 より次のように与えられる。

$$v_r = v_0 \left. \frac{\partial y}{\partial r} \right|_{\alpha=0} = v_0 \{ (1+a_1) \sin \theta + 3a_3 \sin 3\theta \} \frac{4}{\pi} \sum_m \frac{m}{m^2 - n^2} \sin k_m z \cos \omega t \quad (\text{A3.1.47})$$

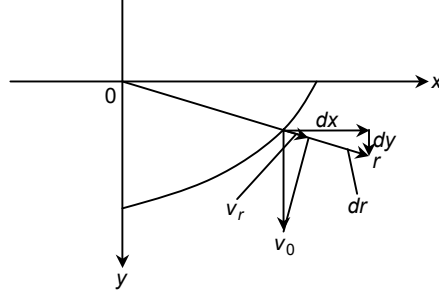


Fig.A3.1.7 Velocity component in r direction

(A3.1.44)式において $r=b_0(\alpha=0)$ を代入したものは r 方向の速度であるから (A3.1.47)式と等置することができる。すなわち

$$\begin{aligned} & -\frac{v_0}{b_0} \sum_m \sum_s A_s \{ sK_s(k_m b_0) + k_m b_0 K_{s-1}(k_m b_0) \} \sin s\theta \frac{4}{\pi} \frac{m}{m^2 - n^2} \sin k_m z \cos \omega t \\ & = v_0 \{ (1+a_1) \sin \theta + 3a_3 \sin 3\theta \} \frac{4}{\pi} \sum_m \frac{m}{m^2 - n^2} \sin k_m z \cos \omega t \end{aligned} \quad (\text{A3.1.48})$$

(A3.1.48)式より s としてとるべき値は $s=1, 3$ である。(A3.1.48)式の両辺を等置すると未知係数 A_1, A_3 は各々次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{b_0(1+a_1)}{K_1(k_m b_0) + k_m b_0 K_0(k_m b_0)} \\ A_3 &= \frac{3b_0 a_3}{3K_3(k_m b_0) + k_m b_0 K_2(k_m b_0)} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A3.1.49})$$

(A3.1.49)式を (A3.1.41)式に代入して $\phi(r, \theta, z, t)$ は次のように表現できる。

$$\begin{aligned} & \phi(r, \theta, z, t) \\ & = -\frac{4}{\pi} \sum_m \frac{m}{m^2 - n^2} \left\{ \frac{(1+a_1)K_1(k_m r)}{K_1(k_m b_0) + k_m b_0 K_0(k_m b_0)} \sin \theta + \frac{3a_3 K_3(k_m r)}{3K_3(k_m b_0) + k_m b_0 K_2(k_m b_0)} \sin 3\theta \right\} \\ & \quad \times \sin k_m z \cos \omega t \end{aligned} \quad (\text{A3.1.50})$$

(3) 流れ関数 $\psi(r, \theta, z, t)$

Fig.A3.1.8 に示す断面に鉛直方向の流速を \bar{v} とすると v_0 に対して Cauchy-Riemann の関係を適用すると次の関係を有する。

$$\begin{aligned}
 \bar{v} &= \frac{\partial \phi}{\partial n} \\
 &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial n} \\
 &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} + \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \left(-\frac{\partial x}{\partial s} \right) \\
 &= \frac{\partial \psi}{\partial s} = v_0 \left(-\frac{dx}{ds} \right)
 \end{aligned} \tag{A3.1.51}$$

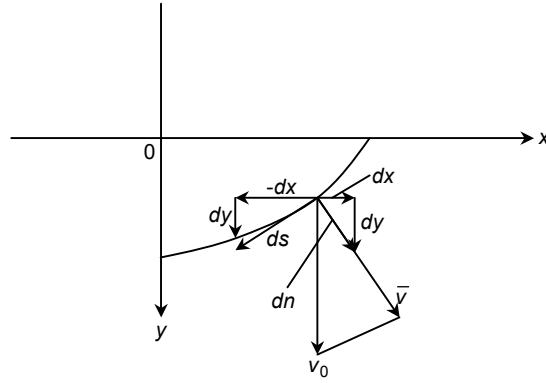


Fig.A3.1.8 Velocity component in n direction

(A3.1.51)式より

$$\psi = (-v_0 x + C) \cdot \frac{4}{\pi} \sum_m \frac{m}{m^2 - n^2} \sin k_m z \cos \omega t \tag{A3.1.52}$$

$x=0$ において流れは対称であるから $C=0$ となり $\psi|_{\alpha=0}$ は (A3.1.2)式を代入することにより

$$\psi|_{\alpha=0} = -v_0 b_0 \{ (1 + a_1) \cos \theta + a_3 \cos 3\theta \} \cdot \frac{4}{\pi} \sum_m \frac{m}{m^2 - n^2} \sin k_m z \cos \omega t \tag{A3.1.53}$$

と与えられることになる。

(4) 有限長効果を考慮した運動エネルギー T と三次元修正係数 J

物体が流体に与える運動エネルギー T は次式で与えられる。

$$T = -\frac{\rho}{2} \int_0^\ell \int_0^{2\pi} \phi \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \Big|_{\alpha=0} d\theta dz \quad (\text{A3.1.54})$$

(A3.1.54)式に (A3.1.50)式および (A3.1.53)式を代入すると

$$\begin{aligned} T &= \frac{\rho}{2} v_0^2 b_0^2 \left(\frac{4}{\pi} \right)^2 \sum_m \left(\frac{m}{m^2 - n^2} \right)^2 \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{(1+a_1)\sin\theta}{1+k_m b_0 \frac{K_0(k_m b_0)}{K_1(k_m b_0)}} + \frac{3a_3 \sin 3\theta}{3+k_m b_0 \frac{K_2(k_m b_0)}{K_3(k_m b_0)}} \right\} \\ &\quad \times \{(1+a_1)\sin\theta + 3a_3 \sin 3\theta\} d\theta \int_0^\ell \sin^2 k_m z \cdot dz \cdot \cos^2 \omega t \\ &= \frac{\rho \ell}{4} v_0^2 b_0^2 \left(\frac{4}{\pi} \right)^2 \pi \sum_m \left(\frac{m}{m^2 - n^2} \right)^2 \left\{ \frac{(1+a_1)^2}{1+k_m b_0 \frac{K_0(k_m b_0)}{K_1(k_m b_0)}} + \frac{9a_3^2}{3+k_m b_0 \frac{K_2(k_m b_0)}{K_3(k_m b_0)}} \right\} \cos^2 \omega t \end{aligned} \quad (\text{A3.1.55})$$

一方, 3.1.2(3) において二次元付加質量を計算し (A3.1.32) 式を与えた。これと同様な考えで n 節モードの場合 z 軸に沿った y 方向の速度は

$$v_0 \rightarrow v_0 \cos \frac{n\pi z}{\ell} \quad (\text{A3.1.56})$$

と与えることができるから ℓ の長さあたりの運動エネルギー T は

$$\begin{aligned} T &= \frac{\pi}{2} \rho b_0^2 v_0^2 \int_0^\ell \cos^2 \frac{n\pi z}{\ell} dz \left\{ (1+a_1)^2 + 3a_3^2 \right\} \cos^2 \omega t \\ &= \frac{\rho \ell}{4} \pi v_0^2 b_0^2 \left\{ (1+a_1)^2 + 3a_3^2 \right\} \cos^2 \omega t \end{aligned} \quad (\text{A3.1.57})$$

と与えることができる。

したがって有限長さを考慮した三次元修正係数 J は (A3.1.55)式と (A3.1.57)式の比より

$$J = \frac{16}{\pi^2} \cdot \frac{\sum_m \left(\frac{m}{m^2 - n^2} \right)^2 \left\{ \frac{(1+a_1)^2}{1 + k_m b_0 \frac{K_0(k_m b_0)}{K_1(k_m b_0)}} + \frac{9a_3^2}{3 + k_m b_0 \frac{K_2(k_m b_0)}{K_3(k_m b_0)}} \right\}}{(1+a_1)^2 + 3a_3^2} \quad (\text{A3.1.58})$$

として求められる。

なおここで $k_m b_0$ は (A3.1.5) 式 の 関係 を 用 い る と

$$\begin{aligned} k_m b_0 &= \frac{m\pi}{\ell} \cdot \frac{b}{1+a_1+a_3} \\ &= \frac{m\pi}{1+a_1+a_3} \cdot \frac{b}{\ell} \end{aligned} \quad (\text{A3.1.59})$$

と表すことができる。

A3.1.4 船の単位長さあたりに分布する付加質量

三次元修正係数 J は船の有限長さを考慮したものであり船の単位長さあたりに分布させる付加質量 m_ℓ は (A3.1.33)式,(A3.1.34)式および (A3.1.58)式の関係を用いると

$$m_\ell = C_{2V} \cdot J \cdot \frac{\rho \pi b^2}{2} \quad (\text{A3.1.60})$$

として与えればよい。

付録 3.2 a_1, a_3, ξ に対する制限条件

ζ 面における単位円を z 面における船体形状に写像するとき (Fig.3.2.1 参照) 3 個のパラメータを用いた Lewis 変換が適用される。

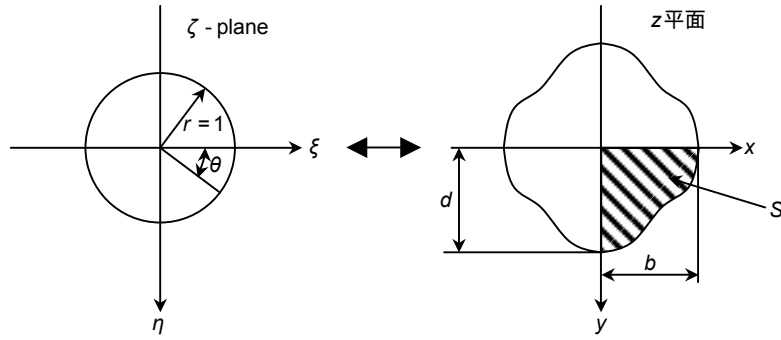


Fig.A3.2.1 Mapping of ζ plane to z plane

このとき単位円の外部が船体形状の外部に対応させるため次式が用いられる。

$$z = b_0 \left(\zeta + \frac{a_1}{\zeta} + \frac{a_3}{\zeta^3} \right) \quad (\text{A3.2.1})$$

$$\text{ここで } \zeta = e^\alpha e^{i\theta} \quad (\alpha \geq 0)$$

船体断面上の座標 x_0, y_0 とするとき ($\alpha=0$)

$$\begin{aligned} x_0 &= b_0 \{ (1+a_1)\cos\theta + a_3 \cos 3\theta \} \\ y_0 &= b_0 \{ (1-a_1)\sin\theta - a_3 \sin 3\theta \} \end{aligned} \quad (\text{A3.2.2})$$

の関係がある。

付録 3.1 の (A3.1.10)式において次の関係が導かれた。

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{b}{2b_0}(1-\lambda) \\ a_3 &= \frac{b}{2b_0}(1+\lambda)-1 \\ \text{ここで } \lambda &= \frac{d}{b} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A3.2.3})$$

単位円の外部が船体外部に一対一に対応させるためには, a_1, a_3 に制限がある。このことについて記述する。

A3.2.1 a_1, a_3 に対する制限条件

条件①： $\theta=0$ において船体横断面が Fig.A3.2.2 のようにならないこと。

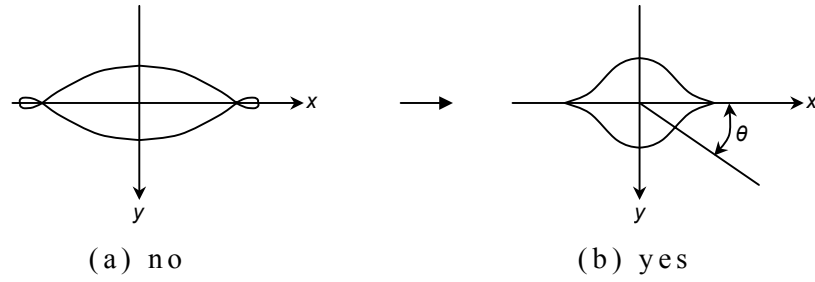


Fig.A3.2.2 No dual value at x axis

この場合

$$\left. \frac{dy}{d\theta} \right|_{\theta=0} \geq 0 \quad (\text{A3.2.4})$$

であること。

(A3.2.2)式より

$$\begin{aligned} \left. \frac{dy}{d\theta} \right|_{\theta=0} &= b_0 [(1-a_1)\cos\theta - 3a_3\cos 3\theta]_{\theta=0} \\ &\rightarrow 1-a_1-3a_3 \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{A3.2.5})$$

の関係が導かれる。

条件②： $\theta = \frac{\pi}{2}$ において船体横断面 Fig.A3.2.3 のようにならないこと。

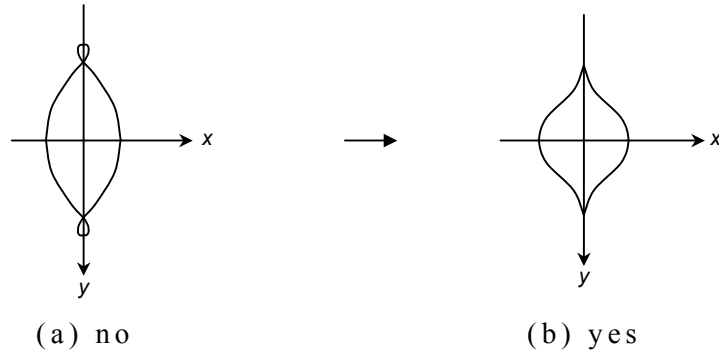


Fig.A3.2.3 No dual value at y axis

この場合次の関係を満足しなければならない。

$$\left. \frac{dx}{d\theta} \right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} \leq 0 \quad (\text{A3.2.6})$$

(A3.2.6)式に (A3.2.2)式を代入すると

$$\begin{aligned} \left. \frac{dx}{d\theta} \right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} &= -b_0 [(1-a_1)\sin\theta + 3a_3 \sin 3\theta]_{\theta=\frac{\pi}{2}} \leq 0 \\ &\rightarrow 1+a_1-3a_3 \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{A3.2.7})$$

を満足しなければならない。

条件③：船幅 b は正であること。

(A3.2.2)式より $\theta=0$ として

$$\begin{aligned} b &= b_0 [(1+a_1)\cos\theta + a_3 \cos 3\theta]_{\theta=0} \geq 0 \\ &\rightarrow 1+a_1+a_3 \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{A3.2.8})$$

の条件が与えられる。

条件④：吃水 d は正であること。

(A3.2.2)式より $\theta = \frac{\pi}{2}$ として

$$d = b_0[(1 - a_1)\sin\theta - a_3 \sin 3\theta]_{\theta=\frac{\pi}{2}} \geq 0$$

$$\rightarrow 1 - a_1 + a_3 \geq 0 \quad (\text{A3.2.9})$$

を満足する必要がある。

条件⑤：断面肩部が単連結であること。

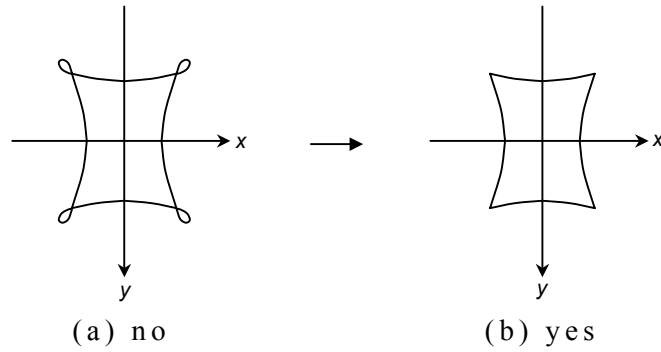


Fig.A3.2.4 No dual value at corner

すなわち $\frac{dx}{d\theta} = 0$ となる角度 θ で $\frac{dy}{d\theta} \geq 0$ となることが必要である。

$\frac{dx}{d\theta}$ は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= -b_0[(1 - a_1)\sin\theta + 3a_3 \sin 3\theta] = 0 \\ \text{ここで } \sin 3\theta &= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{A3.2.10})$$

(A3.2.10)式より

$$(1 + a_1) + 3a_3(3 - 4\sin^2\theta) = 0$$

が与えられるので

$$\sin^2\theta = \frac{1 + a_1 + 9a_3}{12a_3} \quad (\text{A3.2.11})$$

の関係が導かれる。

一方 $\frac{dy}{d\theta}$ は

$$\frac{dy}{d\theta} = b_0 [(1-a_1)\cos\theta - 3a_3 \cos 3\theta]$$

であり, $\cos 3\theta$ は

$$\cos 3\theta = \cos\theta(1-4\sin^2\theta) \quad (\text{A3.2.12})$$

で与えられるので $\frac{dy}{d\theta}$ は

$$\frac{dy}{d\theta} = b_0 \cos\theta [1-a_1-3a_3(1-4\sin^2\theta)] > 0 \quad (\text{A3.2.13})$$

と与えられる。

(A3.2.13)式に (A3.2.11)式を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= b_0 \cos\theta [1-a_1-3a_3+1+a_1+9a_3] > 0 \\ &\rightarrow a_3 > -\frac{1}{3} \end{aligned} \quad (\text{A3.2.14})$$

を満足しなければならない。

以上条件①～⑤を図示すると a_1, a_3 の満足すべき条件は Fig.A3.2.5 に示す着色部の値である。

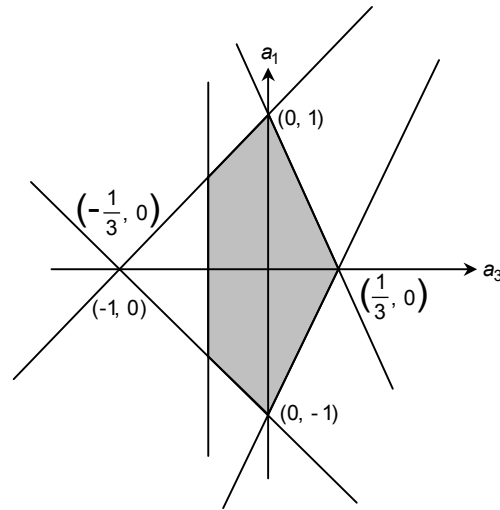


Fig.A3.2.5 Domain of a_1, a_3 staliotified to condition

A3.2.2 ξ における符号の条件

付録 A3.1 の (A3.1.14)式において ξ 値を次のように与えた。

$$\xi = \frac{b_0}{b} = \frac{3(1+\lambda) \pm \sqrt{(1+\lambda)^2 + 8\lambda \left(1 - \frac{4}{\pi}\sigma\right)}}{4} \quad (\text{A3.2.14})$$

分子中の正負の符号について 1. で与えた条件をベースに検討する。

条件①より $1 - a_1 - 3a_3 > 0$

これに (A3.2.3)式を代入すると

$$1 - \frac{1-\lambda}{2\xi} - \frac{3(1+\lambda)}{2\xi} + 3 \geq 0$$

より

$$4 - \frac{4+2\lambda}{\xi} \geq 0$$

となり，したがって

$$\begin{aligned} 4\xi &= 3(1+\lambda) \pm \sqrt{A} - 4 - 2\lambda > 0 \\ &\rightarrow \pm\sqrt{A} > 1 - \lambda \end{aligned} \quad (\text{A3.2.15})$$

$$\text{ここで } (1+\lambda)^2 + 8\lambda \left(1 - \frac{4}{\pi}\sigma\right) = A > 0$$

(A3.2.15)式の場合 A の値次第では±どちらでもとることができる。

条件②より $1+a_1-3a_3 \geq 0$

これに (A3.2.3)式を代入すると

$$1+\frac{1-\lambda}{2\xi}-\frac{3(1+\lambda)}{2\xi}+3 \geq 0$$

より

$$4-\frac{1+2\lambda}{\xi} \geq 0$$

となり，したがって

$$\begin{aligned} 4\xi &= 3(1+\lambda) \pm \sqrt{A} - 1 - 2\lambda > 0 \\ &\rightarrow \pm\sqrt{A} > -2 - \lambda \end{aligned} \quad (\text{A3.2.16})$$

この場合も±どちらも満足する解がある。

条件③より $1+a_1+a_3 \geq 0$

これに (A3.2.3)式を代入すると

$$1+\frac{1-\lambda}{2\xi}+\frac{1+\lambda}{2\xi}-1 \geq 0$$

より $\xi > 0$ となりやはり±どちらも満足しうる。

条件④より $1-a_1+a_3 \geq 0$

これに (A3.2.3)式を代入すると

$$1-\frac{1-\lambda}{2\xi}+\frac{1+\lambda}{2\xi}-1 \geq 0$$

より

$$4\xi = 3(1+\lambda) \pm \sqrt{A} - 4\lambda = 3 - \lambda \pm \sqrt{A} > 0 \quad (\text{A3.2.17})$$

と与えられ±どちらでも条件を満足することができる。

条件⑤より $a_3 > -\frac{1}{3}$

これに (A3.2.3)式を代入すると

$$\frac{1+\lambda}{2\xi} - 1 > -\frac{1}{3}$$

より

$$4\xi = 3(1+\lambda) \pm \sqrt{A} - 3(1+\lambda) \leq 0$$

すなわち±のうち負号をとらなければならない。

以上よりξの式は

$$\xi = \frac{3(1+\lambda) - \sqrt{(1+\lambda)^2 + 8\lambda\left(1 - \frac{4}{\pi}\sigma\right)}}{4} \quad (\text{A3.2.18})$$

で与えなければならない。

付録 3.3 速度ポテンシャル係数 α_s の導出根拠

速度ポテンシャル $\phi(r, \theta, z, t)$ は (3.4.15) において

$$\phi(r, \theta, z, t) = -\dot{\delta}(t)b_0 \sum_{s=1,3,\dots}^9 \sum_m a_m \frac{\alpha_s}{s + k_m b_0 \frac{K_{s-1}(k_m b_0)}{K_s(k_m b_0)}} \sin s\theta \sin k_m z \quad (\text{A3.3.1})$$

で与えられることを示した。(A3.3.1)式中の α_s は (3.4.11)式の関係すなわち

$$\sum \alpha_s \sin s\theta = \{(1+a_1)\sin\theta + 3a_3 \sin 3\theta\} [1 - \eta\xi^2 \{(1+a_1)\cos\theta + a_3 \cos 3\theta\}^2] \quad (\text{A3.3.2})$$

の関係より決定される。

今右辺を展開すると次のようになる。

$$\text{右辺} = (1+a_1)\sin\theta + 3a_3 \sin 3\theta - \eta\xi^2 \{(1+a_1)\sin\theta + 3a_3 \sin 3\theta\} \{(1+a_1)\cos\theta + a_3 \cos 3\theta\}^2 \quad (\text{A3.3.3})$$

(A3.3.3)式の右辺第2項を展開する。

$$\begin{aligned} \text{右辺第2項} &= -\eta\xi^2 \{(1+a_1)\sin\theta + 3a_3 \sin 3\theta\} \{(1+a_1)^2 \cos^2 \theta \\ &\quad + 2a_3(1+a_1)\cos 3\theta \cos \theta + a_3^2 \cos^2 3\theta\} \\ &= -\frac{\eta}{2} \xi^2 \{(1+a_1)\sin\theta + 3a_3 \sin 3\theta\} \{(1+a_1)^2 (1 + \cos 2\theta) \\ &\quad + 2a_3(1+a_1)(\cos 2\theta + \cos 4\theta) + a_3^2 (1 + \cos 6\theta)\} \\ &= -\frac{\eta}{2} \xi^2 \{(1+a_1)\sin\theta + 3a_3 \sin 3\theta\} \left[\{(1+a_1)^2 + a_3^2\} \right. \\ &\quad \left. + \{(1+a_1)^2 + 2a_3(1+a_1)\} \cos 2\theta + \{2a_3(1+a_1)\} \cos 4\theta + \{a_3^2\} \cos 6\theta \right] \end{aligned} \quad (\text{A3.3.4})$$

今 (3.3.4)式の係数を次のように定義する。

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= 1+a_1 \\ \mu_3 &= 3a_3 \\ \kappa_0 &= (1+a_1)^2 + a_3^2 \\ \kappa_2 &= (1+a_1)^2 + 2a_3(1+a_1) \\ \kappa_4 &= 2a_3(1+a_1) \\ \kappa_6 &= a_3^2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A3.3.5})$$

$$\begin{aligned}
\text{右辺} &= \mu_1 \sin \theta + \mu_3 \sin 3\theta - \frac{\eta \xi^2}{2} (\mu_1 \sin \theta + \mu_3 \sin 3\theta) \\
&\quad (\kappa_0 + \kappa_2 \cos 2\theta + \kappa_4 \cos 4\theta + \kappa_6 \cos 6\theta) \\
&= \left\{ \mu_1 \left(\kappa_0 - \frac{\kappa_2}{2} \right) + \frac{\mu_3}{2} (\kappa_2 - \kappa_4) \right\} \sin \theta + \left\{ \frac{\mu_1}{2} (\kappa_2 - \kappa_4) + \mu_3 \left(\kappa_0 - \frac{\kappa_6}{2} \right) \right\} \sin 3\theta \\
&\quad + \left\{ \frac{\mu_1}{2} (\kappa_4 - \kappa_6) + \frac{\mu_3}{2} \kappa_2 \right\} \sin 5\theta + \left\{ \frac{\mu_1}{2} \kappa_6 + \frac{\mu_3}{2} \kappa_4 \right\} \sin 7\theta + \frac{\mu_3 \kappa_6}{2} \sin 9\theta \\
&= \frac{1}{2} (1 + a_1) \left\{ (1 + a_1)^2 + a_3 (1 + a_1) + 2a_3^2 \right\} \sin \theta \\
&\quad + \frac{1}{2} \left\{ (1 + a_1)^3 + 6a_3 (1 + a_1)^2 + 3a_3^3 \right\} \sin 3\theta \\
&\quad + \frac{1}{2} \left\{ 5a_3 (1 + a_1) (1 + a_1 + a_3) \right\} \sin 5\theta \\
&\quad + \frac{1}{2} \left\{ 7a_3^2 (1 + a_1) \right\} \sin 7\theta \\
&\quad + \frac{1}{2} \left\{ 3a_3^3 \right\} \sin 9\theta
\end{aligned} \tag{A3.3.6}$$

(A3.3.2)式に(A3.3.6)式の結果を代入すると α_s は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned}
\alpha_1 &= 1 + a_1 - \frac{1}{4} \eta \xi^2 (1 + a_1) \left\{ (1 + a_1)^2 + a_3 (1 + a_1) + 2a_3^2 \right\} \\
\alpha_3 &= 3a_3 - \frac{1}{4} \eta \xi^2 \left\{ (1 + a_1)^3 + 6a_3 (1 + a_1)^2 + 3a_3^3 \right\} \\
\alpha_5 &= -\frac{1}{4} \eta \xi^2 \left\{ 5a_3 (1 + a_1) (1 + a_1 + a_3) \right\} \\
\alpha_7 &= -\frac{1}{4} \eta \xi^2 \left\{ 7a_3^2 (1 + a_1) \right\} \\
\alpha_9 &= -\frac{1}{4} \eta \xi^2 \left\{ 3a_3^3 \right\}
\end{aligned} \right\} \tag{A3.3.7}$$

付録 3.4 流れ関数係数 β_s の導出根拠

船体断面上における流れ関数 $\psi(r, \theta, z, t)|_{r=b_0}$ は (3.3.17)式において

$$\begin{aligned}\psi|_{r=b_0} &= -\dot{\delta}(t)b_0\{(1+a_1)\cos\theta + a_3\cos 3\theta\}\left[1 - \frac{\eta}{3}\xi^2\{(1+a_1)\cos\theta + a_3\cos 3\theta\}^2\right] \\ &= -\dot{\delta}(t)b_0\sum_s \beta_s \cos s\theta\end{aligned}\tag{A3.4.1}$$

と与えられることを示した。

(A3.4.1)式中の β_s はしたがって

$$\sum_s \beta_s \cos s\theta = (1+a_1)\cos\theta + a_3\cos 3\theta - \frac{\eta}{3}\xi^2\{(1+a_1)\cos\theta + a_3\cos 3\theta\}^3\tag{A3.4.2}$$

の関係より決定される。

(A3.4.2)式右辺第2項を展開する。

$$\begin{aligned}\text{右辺第2項} &= (1+a_1)^3\cos^3\theta + 3a_3(1+a_1)^2\cos^2\theta\cos 3\theta \\ &\quad + 3a_3^2(1+a_1)\cos\theta\cos^2 3\theta + a_3^3\cos^3 3\theta\end{aligned}\tag{A3.4.3}$$

(A3.4.3)式中の \cos 項を展開する。

$$\left.\begin{aligned}\cos^3\theta &= \frac{3}{4}\cos\theta + \frac{1}{4}\cos 3\theta \\ \cos^2\theta\cos 3\theta &= \frac{1}{4}\cos\theta + \frac{2}{4}\cos 3\theta + \frac{1}{4}\cos 5\theta \\ \cos\theta\cos^2 3\theta &= \frac{2}{4}\cos\theta + \frac{1}{4}\cos 5\theta + \frac{1}{4}\cos 7\theta \\ \cos^3 3\theta &= \frac{3}{4}\cos 3\theta + \frac{1}{4}\cos 9\theta\end{aligned}\right\}\tag{A3.4.4}$$

(A3.4.4)式を (A3.4.4)式に代入して整理する。

$$\begin{aligned}
\text{右辺第2項} = & \frac{1}{4} \left\{ 3(1+a_1)^3 + 3a_3(1+a_1)^2 + 6a_3^2(1+a_1) \right\} \cos \theta \\
& + \frac{1}{4} \left\{ (1+a_1)^3 + 6a_3(1+a_1)^2 + 3a_3^3 \right\} \cos 3\theta \\
& + \frac{1}{4} \left\{ 3a_3(1+a_1)^2 + 3a_3^2(1+a_1) \right\} \cos 5\theta \\
& + \frac{1}{4} \left\{ 3a_3^2(1+a_1) \right\} \cos 7\theta \\
& + \frac{1}{4} \left\{ a_3^3 \right\} \cos 9\theta
\end{aligned} \tag{A3.4.5}$$

(A3.4.5)式を (3.4.2)式に代入して辺々を等置することにより β_s は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned}
\beta_1 &= 1+a_1 - \frac{1}{12} \eta \xi^2 \left[3(1+a_1) \left\{ (1+a_1)^2 + a_3(1+a_1) + 2a_3^2 \right\} \right] \\
\beta_3 &= a_3 - \frac{1}{12} \eta \xi^2 \left\{ (1+a_1)^3 + 6a_3(1+a_1)^2 + 3a_3^3 \right\} \\
\beta_5 &= -\frac{1}{12} \eta \xi^2 \left\{ 3a_3(1+a_1)(1+a_1+a_3) \right\} \\
\beta_7 &= -\frac{1}{12} \eta \xi^2 \left\{ 3a_3^2(1+a_1) \right\} \\
\beta_9 &= -\frac{1}{12} \eta \xi^2 \left\{ a_3^3 \right\}
\end{aligned} \right\} \tag{A3.4.6}$$

付録 3.5 振動モード $Z(z)$ のフーリエ展開

主船体および二重底構造が有限長さであることを考慮するため振動モードをフーリエ sine 展開することによりそれを近似的に実現する。主船体振動モードと二重底についてはモードの \sin 分布と \sin の 2 乗分布の場合について各々 (3.4.20), (3.4.22) および (3.4.24) に結果を示したが, その導出根拠について以下に記述する。

A3.5.1 主船体振動モードの場合

今船の長さを ℓ としたときの振動モードがフーリエ sine 展開により次のように与えられると仮定する。

$$Z(z) = \cos \frac{n\pi z}{\ell} = \sum a_m \sin \frac{m\pi z}{\ell} \quad (\text{A3.5.1})$$

両辺に $\sin \frac{m\pi z}{\ell}$ を掛け $[0, \ell]$ 間で積分すると

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \int_0^\ell \cos \frac{n\pi z}{\ell} \sin \frac{m\pi z}{\ell} dz = \frac{1}{2} \int_0^\ell \left\{ \sin \frac{(m+n)\pi z}{\ell} + \sin \frac{(m-n)\pi z}{\ell} \right\} dz \\ &= \frac{2}{\pi} \ell \frac{m}{m^2 - n^2} \end{aligned} \quad (\text{A3.5.2})$$

ただし $m+n, m-n$ は奇数

の関係を満足する。

したがって a_m は

$$a_m = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{m}{m^2 - n^2} \quad (\text{A3.5.3})$$

ただし n : 奇数のとき $m=2, 4, 6, \dots$

n : 偶数のとき $m=1, 3, 5, \dots$

で表される。

A3.5.2 二重底構造が sine モードで振動する場合

Fig.3.4.5 に示すモードを考えたとき次の関係を満足するように a_m を決定しなければならない。

$$\left. \begin{array}{ll} 0 & 0 < z < \ell_0 \\ \sin \frac{\pi(z - \ell_0)}{\ell_H} & \ell_0 < z < \ell - \ell_1 \\ 0 & \ell - \ell_1 < z < 0 \end{array} \right\} = \sum_m a_m \sin \frac{m\pi z}{\ell} \quad (\text{A3.5.4})$$

(A3.5.4)式の左辺に $\sin \frac{m\pi z}{\ell}$ を掛け $[0, \ell]$ 間で積分すると左辺は次のように展開できる。

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \int_{\ell_0}^{\ell - \ell_1} \sin \frac{\pi(z - \ell_0)}{\ell_H} \sin \frac{m\pi z}{\ell} dz \\ &= \cos \pi \frac{\ell_0}{\ell_H} \int_{\ell_0}^{\ell - \ell_1} \sin \frac{\pi z}{\ell_H} \sin \frac{m\pi z}{\ell} dz - \sin \pi \frac{\ell_0}{\ell_H} \int_{\ell_0}^{\ell - \ell_1} \cos \frac{\pi z}{\ell_H} \sin \frac{m\pi z}{\ell} dz \\ &= \frac{1}{2} \cos \pi \frac{\ell_0}{\ell_H} \left\{ \int_{\ell_0}^{\ell - \ell_1} \cos \pi \left(m - \frac{\ell}{\ell_H} \right) \frac{z}{\ell} dz - \int_{\ell_0}^{\ell - \ell_1} \cos \pi \left(m + \frac{\ell}{\ell_H} \right) \frac{z}{\ell} dz \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sin \pi \frac{\ell_0}{\ell_H} \left\{ \int_{\ell_0}^{\ell - \ell_1} \sin \pi \left(m + \frac{\ell}{\ell_H} \right) \frac{z}{\ell} dz + \int_{\ell_0}^{\ell - \ell_1} \sin \pi \left(m - \frac{\ell}{\ell_H} \right) \frac{z}{\ell} dz \right\} \\ &= \frac{1}{2} A_1 \cos \pi \frac{\ell_0}{\ell_H} + \frac{1}{2} A_2 \sin \pi \frac{\ell_0}{\ell_H} \quad (\text{A3.5.5}) \end{aligned}$$

A_1 および A_2 は各々次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{\ell}{\pi} \left\{ \frac{\sin \pi \left(m - \frac{\ell}{\ell_H} \right) \frac{\ell - \ell_1}{\ell} - \sin \pi \left(m - \frac{\ell}{\ell_H} \right) \frac{\ell_0}{\ell}}{m - \frac{\ell}{\ell_H}} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\sin \pi \left(m + \frac{\ell}{\ell_H} \right) \frac{\ell - \ell_1}{\ell} - \sin \pi \left(m + \frac{\ell}{\ell_H} \right) \frac{\ell_0}{\ell}}{m + \frac{\ell}{\ell_H}} \right\} \\
 A_2 &= \frac{\ell}{\pi} \left\{ \frac{\cos \pi \left(m + \frac{\ell}{\ell_H} \right) \frac{\ell - \ell_1}{\ell} - \cos \pi \left(m + \frac{\ell}{\ell_H} \right) \frac{\ell_0}{\ell}}{m + \frac{\ell}{\ell_H}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\cos \pi \left(m - \frac{\ell}{\ell_H} \right) \frac{\ell - \ell_1}{\ell} - \cos \pi \left(m - \frac{\ell}{\ell_H} \right) \frac{\ell_0}{\ell}}{m - \frac{\ell}{\ell_H}} \right\}
 \end{aligned} \tag{A3.5.6}$$

このとき a_m は次のように計算できる。

$$a_m = f_m + g_m \cos \pi \frac{\ell_0}{\ell_H} + h_m \sin \pi \frac{\ell_0}{\ell_H} \quad (\text{A3.5.7})$$

ここで f_m, g_m, h_m は次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} f_m &= 0 \\ g_m &= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\sin \pi \left(m - \frac{\ell}{\ell_H} \right) \frac{\ell - \ell_1}{\ell} - \sin \pi \left(m - \frac{\ell}{\ell_H} \right) \frac{\ell_0}{\ell}}{m - \frac{\ell}{\ell_H}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sin \pi \left(m + \frac{\ell}{\ell_H} \right) \frac{\ell - \ell_1}{\ell} - \sin \pi \left(m + \frac{\ell}{\ell_H} \right) \frac{\ell_0}{\ell}}{m + \frac{\ell}{\ell_H}} \right\} \\ h_m &= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\cos \pi \left(m + \frac{\ell}{\ell_H} \right) \frac{\ell - \ell_1}{\ell} - \cos \pi \left(m + \frac{\ell}{\ell_H} \right) \frac{\ell_0}{\ell}}{m + \frac{\ell}{\ell_H}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\cos \pi \left(m - \frac{\ell}{\ell_H} \right) \frac{\ell - \ell_1}{\ell} - \cos \pi \left(m - \frac{\ell}{\ell_H} \right) \frac{\ell_0}{\ell}}{m - \frac{\ell}{\ell_H}} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A3.5.8})$$

(A3.5.8)式で与える g_m, h_m は $m=1, 2, 3, \dots, \infty$ において成立する。

A3.5.3 二重底構想が sine の 2 乗モードで振動する場合

Fig.3.4.6 に示すモードを考えたとき，次の関係を満足するように a_m を決定する。

$$\left. \begin{array}{ll} 0 & 0 < z < \ell_0 \\ \sin^2 \frac{\pi(z - \ell_H)}{\ell_H} & \ell_0 < z < \ell - \ell_1 \\ 0 & \ell - \ell_1 < z < \ell_0 \end{array} \right\} = \sum_m a_m \sin \frac{m\pi z}{\ell} \quad (\text{A3.5.9})$$

(A3.5.9)式の両辺に $\sin \frac{m\pi z}{\ell}$ を掛け $[0, \ell]$ 間で積分すると左辺は次のように展開できる。

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \int_{\ell_0}^{\ell - \ell_1} \sin^2 \pi \frac{z - \ell_0}{\ell_H} \sin \frac{m\pi z}{\ell} dz \\ &= \frac{1}{2} \int_{\ell_0}^{\ell - \ell_1} \sin \frac{m\pi z}{\ell} dz - \frac{1}{2} \cos 2\pi \frac{\ell_0}{\ell_H} \int_{\ell_0}^{\ell - \ell_1} \sin \frac{m\pi z}{\ell} \cos \frac{2\pi z}{\ell_H} dz \\ &\quad - \frac{1}{2} \sin 2\pi \frac{\ell_0}{\ell_H} \int_{\ell_0}^{\ell - \ell_1} \sin \frac{m\pi z}{\ell} \sin \frac{2\pi z}{\ell_H} dz \\ &= A_0 + A_1 \cos 2\pi \frac{\ell_0}{\ell_H} + A_2 \sin 2\pi \frac{\ell_0}{\ell_H} \end{aligned} \quad (\text{A3.5.10})$$

A_0, A_1, A_2 は各々次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned}
 A_0 &= \frac{1}{2} \int_{\ell_0}^{\ell-\ell_1} \sin \frac{m\pi z}{\ell} dz = \frac{\ell}{2m\pi} \left\{ \cos \frac{m\pi \ell_0}{\ell} - \cos \frac{m\pi(\ell-\ell_1)}{\ell} \right\} \\
 A_1 &= -\frac{1}{2} \int_{\ell_0}^{\ell-\ell_1} \sin \frac{m\pi z}{\ell} \cos \frac{2\pi z}{\ell_H} dz \\
 &= -\frac{\ell}{4\pi} \left\{ \frac{\cos \pi \left(m + \frac{2\ell}{\ell_H} \right) \frac{\ell_0}{\ell} - \cos \pi \left(m + \frac{2\ell}{\ell_H} \right) \frac{\ell-\ell_1}{\ell}}{m + \frac{2\ell}{\ell_H}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\cos \pi \left(m - \frac{2\ell}{\ell_H} \right) \frac{\ell_0}{\ell} - \cos \pi \left(m - \frac{2\ell}{\ell_H} \right) \frac{\ell-\ell_1}{\ell}}{m - \frac{2\ell}{\ell_H}} \right\} \\
 A_2 &= -\frac{1}{2} \int_{\ell_0}^{\ell-\ell_1} \sin \frac{m\pi z}{\ell} \sin \frac{2\pi z}{\ell_H} dz \\
 &= -\frac{\ell}{4\pi} \left\{ \frac{\sin \pi \left(m - \frac{2\ell}{\ell_H} \right) \frac{\ell-\ell_1}{\ell} - \sin \pi \left(m - \frac{2\ell}{\ell_H} \right) \frac{\ell_0}{\ell}}{m - \frac{2\ell}{\ell_H}} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\sin \pi \left(m + \frac{2\ell}{\ell_H} \right) \frac{\ell-\ell_1}{\ell} - \sin \pi \left(m + \frac{2\ell}{\ell_H} \right) \frac{\ell_0}{\ell}}{m + \frac{2\ell}{\ell_H}} \right\}
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A3.5.11})$$

したがって f_m, g_m, h_m は次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned}
 f_m &= \frac{1}{m\pi} \left\{ \cos m\pi \frac{\ell_0}{\ell} - \cos m\pi \frac{\ell - \ell_1}{\ell} \right\} \\
 g_m &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\cos \pi \left(m + \frac{2\ell}{\ell_H} \right) \frac{\ell - \ell_1}{\ell} - \cos \pi \left(m + \frac{2\ell}{\ell_H} \right) \frac{\ell_0}{\ell}}{m + \frac{2\ell}{\ell_H}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\cos \pi \left(m - \frac{2\ell}{\ell_H} \right) \frac{\ell - \ell_1}{\ell} - \cos \pi \left(m - \frac{2\ell}{\ell_H} \right) \frac{\ell_0}{\ell}}{m - \frac{2\ell}{\ell_H}} \right\} \\
 h_m &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\sin \pi \left(m - \frac{2\ell}{\ell_H} \right) \frac{\ell_0}{\ell} - \sin \pi \left(m - \frac{2\ell}{\ell_H} \right) \frac{\ell - \ell_1}{\ell}}{m - \frac{2\ell}{\ell_H}} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\sin \pi \left(m + \frac{2\ell}{\ell_H} \right) \frac{\ell_0}{\ell} - \sin \pi \left(m + \frac{2\ell}{\ell_H} \right) \frac{\ell - \ell_1}{\ell}}{m + \frac{2\ell}{\ell_H}} \right\}
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A3.5.12})$$

ここで $m=1, 2, 3, \dots, \infty$ において上式は成立する。

付録 4.1 剛性・荷重分布を与える係数項の決定

(4.2.7)式～(4.2.9)式は次式に示す共通な関数表示で代表させることができる。

$$X(\xi) = X \left\{ 1 - \tilde{\sigma} \left(e^{-\sigma \xi} + e^{\sigma(\xi-1)} \right) \right\} \quad (\text{A4.1.1})$$

今 $\xi=0, 0.25, 0.5$ における $X(\xi)$ を各々 X_0, X_1, X_2 とする。

また

$$x = e^{-0.05\sigma} \quad (\text{A4.1.2})$$

とおくと X_0, X_1, X_2 は次のように与えることができる。

$$\left. \begin{aligned} X_0 &= X \left\{ 1 - \tilde{\sigma} (1 + x^{20}) \right\} \\ X_1 &= X \left\{ 1 - \tilde{\sigma} (x^5 + x^{15}) \right\} \\ X_2 &= X \left\{ 1 - 2\tilde{\sigma} \cdot x^{10} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.1.3})$$

今 x^{10} 以上の項を無視し， $X_1/X_0, X_2/X_0$ を各々 ζ_1, ζ_2 とおくと

$$\left. \begin{aligned} \zeta_1 &= \frac{1 - \tilde{\sigma} \cdot x^5}{1 - \tilde{\sigma}} \\ \zeta_2 &= \frac{1}{1 - \tilde{\sigma}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.1.4})$$

(A4.1.4) を整理することにより $\tilde{\sigma}$ および σ は次のように表される。

$$\tilde{\sigma} = 1 - \frac{1}{\zeta_2} \quad (\text{A4.1.5})$$

$$\sigma = 4 \ln \frac{\zeta_2 - 1}{\zeta_2 - \zeta_1} \quad (\text{A4.1.6})$$

付録 4.2 ビームの曲げおよびせん断のたわみの基本関数および
たわみの同相性に関する検証

4.3 節において曲げおよびせん断たわみに対する基本関数が次式で与えられると仮定した。

$$X_n(\xi) \sim \cos \lambda_n \xi \quad (\text{A4.2.1})$$

ここで $\lambda_n = n\pi$ (n : 節数)

また, 曲げとせん断の同相性を仮定した。すなわち

$$\delta_{b1} \cdot \delta_{s1} > 0 \quad (\text{A4.2.2})$$

これらの根拠につき以下に検証する。

A4.2.1 Timoshenko ビームの振動方程式

曲げ，せん断および回転慣性を考慮したいわゆる Timoshenko ビームの振動方程式は次式で与えられる [32]。

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \frac{w}{g} \left(\frac{EI}{GA_w} + r^2 \right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{w}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \left(\frac{w}{g} \right)^2 \frac{r^2}{GA_w} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 0 \quad (\text{A4.2.3})$$

(A4.2.3)式のたわみ y は曲げたわみとせん断たわみが統合されたものである。各たわみ成分比率等はこの式からは分からない。したがって (A4.2.3)式の成立根拠をまず明らかにする。以下使用する記号の意味は以下のとおりである。

M : 曲げモーメント [N・m]

r : 質量回転慣性半径 [m]

Q : せん断力 [N]

w : 単位長さあたりの重量 [N・m⁻¹]

I : ビーム断面の断面 2 次モーメント [m⁴]

t : 時間座標 [s]

E : ヤング率 [N/m²]

g : 重力の加速度 [m・s⁻²]

G : 横弾性係数 [N/m²]

x : 長さの座標 [m]

GA_w : せん断剛性 [N]

ℓ : ビームの長さ [m]

y : 振幅 [m]

ψ : 曲げモーメントによる勾配 [無次元]

ビームに働く曲げモーメント M およびせん断力 Q は次式で与えられる。

$$M = -EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (\text{A4.2.4})$$

$$Q = GA_w \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \psi \right) \quad (\text{A4.2.5})$$

モーメントのつり合い式は

$$-\frac{\partial M}{\partial x} + Q = \frac{w}{g} r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (\text{A4.2.6})$$

の関係を満足し，上下方向の力のつり合いは

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{w}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (\text{A4.2.7})$$

の関係を有する。

(A4.2.6)式に (A4.2.4)式および (A4.2.5)式を代入して整理すると次の関係が得られる。

$$\left(GA_w \frac{\partial}{\partial x} \right) y + \left(EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} - GA_w - \frac{w}{g} r^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi = 0 \quad (\text{A4.2.8})$$

同様に (A4.2.7)式に (A4.2.5)式を代入すると次式を満足する。

$$\left(GA_w \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{w}{g} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) y - \left(GA_w \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi = 0 \quad (\text{A4.2.9})$$

(A4.2.8)式, (A4.2.9)式より y に関する微分方程式を導くと (A4.2.3)式と同一となり ψ に関しても同一の次の微分方程式を導くことができる。

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \frac{w}{g} \left(\frac{EI}{GA_w} + r^2 \right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{w}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \left(\frac{w}{g} \right)^2 \frac{r^2}{GA_w} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 0 \quad (\text{A4.2.10})$$

$$EI \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} - \frac{w}{g} \left(\frac{EI}{GA_w} + r^2 \right) \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{w}{g} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \left(\frac{w}{g} \right)^2 \frac{r^2}{GA_w} \frac{\partial^4 \psi}{\partial t^4} = 0 \quad (\text{A4.2.11})$$

(A4.2.10)式および (A4.2.11)式に示すように y, ψ に関する微分方程式は同一となる。

今 $y(x, t), \psi(x, t)$ が次のように変数分離形で与えられるとする。

$$\left. \begin{aligned} y(x, t) &= y(x) e^{i\omega t} \\ \psi(x, t) &= \psi(x) e^{i\omega t} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.2.12})$$

(A4.2.12)式を (A4.2.10)式, (A4.2.11)式に代入して整理すると x に関する次の微分方程式が得られる。

$$\left\{ \frac{d^4}{dx^4} + \omega^2 \frac{wr^2}{gEI} \left(1 + \frac{EI}{GA_w r^2} \right) \frac{d^2}{dx^2} - \omega^2 \frac{w}{g} \left(1 - \omega^2 \frac{w}{g} \frac{r^2}{GA_w} \right) \right\} \begin{pmatrix} y \\ \psi \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{A4.2.13})$$

(A4.2.13) 式を次のようにおく。

$$\left\{ \frac{d^4}{dx^4} + \left(\frac{\lambda_1^2}{\ell^2} - \frac{\lambda_2^2}{\ell^2} \right) \frac{d^2}{dx^2} - \frac{\lambda_1^2}{\ell^2} \frac{\lambda_2^2}{\ell^2} \right\} \begin{pmatrix} y \\ \psi \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{A4.2.14})$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda_1^2}{\ell^2} - \frac{\lambda_2^2}{\ell^2} &= \omega^2 \frac{wr^2}{gEI} \left(1 + \frac{EI}{GA_w r^2} \right) \quad [\text{m}^{-2}] \\ \frac{\lambda_1^2}{\ell^2} \frac{\lambda_2^2}{\ell^2} &= \omega^2 \frac{w}{g} \left(1 - \omega^2 \frac{w}{g} \frac{r^2}{GA_w} \right) \quad [\text{m}^{-4}] \end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.2.15})$$

λ_1, λ_2 が (A4.2.15)式の関係より与えられれば関数 $y(x, t), \psi(x, t)$ は次のように導かれる。

$$\begin{aligned} y(\xi, t) &= \left(A_1 e^{i\lambda_1 \xi} + A_2 e^{-i\lambda_1 \xi} + A_3 e^{\lambda_2 \xi} + A_4 e^{-\lambda_2 \xi} \right) e^{i\omega t} \\ \psi(\xi, t) &= \left(B_1 e^{i\lambda_1 \xi} + B_2 e^{-i\lambda_1 \xi} + B_3 e^{\lambda_2 \xi} + B_4 e^{-\lambda_2 \xi} \right) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (\text{A4.2.16})$$

ここで $\xi = x/\ell$ で無次元化している。

(A4.2.16)式において $e^{\pm\lambda_2 \xi}$ はたわみモードを表す周期関数とはならないのでこれを見捨てることのできる。すなわち

$$A_3, A_4, B_3, B_4 \rightarrow 0 \quad (\text{A4.2.17})$$

とする。

(A4.2.6)式において右辺の回転慣性を無視し次の関係式を代入する。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dM}{dx} &= -\frac{EI}{\ell^2} \frac{d^2 \psi}{d\xi^2} = \frac{EI}{\ell^2} \lambda_1^2 \psi \\ Q &= GA_w \left(\frac{dy}{\ell d\xi} - \psi \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.2.18})$$

(A4.2.18)式より次式が導かれる。

$$\frac{dM}{dx} - Q = \frac{EI}{\ell^2} \lambda_1^2 \psi - GA_w \left(\frac{dy}{\ell d\xi} - \psi \right) = 0 \quad (\text{A4.2.19})$$

(A4.2.19)式を整理すると y と ψ の間の次の関係が与えられる。

$$\frac{dy}{\ell d\xi} = \left(1 + \frac{EI}{GA_w \ell^2} \lambda_1^2 \right) \psi = (1 + \alpha \lambda_1^2) \psi \quad (\text{A4.2.20})$$

ここで α は次の関係を有する。

$$\alpha = \frac{EI}{GA_w \ell^2} (\text{無次元値}) \quad (\text{A4.2.21})$$

(A4.2.20)式に (A4.2.16)式の関係代入すると次式を満足する。

$$\frac{i\lambda_1}{\ell} (A_1 e^{i\lambda_1 \xi} - A_2 e^{-i\lambda_1 \xi}) = (1 + \alpha \lambda_1^2) (B_1 e^{i\lambda_1 \xi} + B_2 e^{-i\lambda_1 \xi}) \quad (\text{A4.2.22})$$

したがって

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \frac{i\lambda_1}{\ell(1 + \alpha \lambda_1^2)} A_1 \\ B_2 &= -\frac{i\lambda_1}{\ell(1 + \alpha \lambda_1^2)} A_2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.2.23})$$

の関係を満足しなければならない。

曲げたわみ成分 y_b は ψ を x に関して積分し, (A4.2.23)式 の関係を代入することにより次式が導かれる。

$$\begin{aligned} y_b &= \ell \int \psi(\xi) d\xi = \frac{1}{i\lambda_1} (B_1 e^{i\lambda_1 \xi} - B_2 e^{-i\lambda_1 \xi}) \\ &= \frac{1}{1 + \alpha \lambda_1^2} (A_1 e^{i\lambda_1 \xi} - A_2 e^{-i\lambda_1 \xi}) \end{aligned} \quad (\text{A4.2.24})$$

一方せん断たわみ y_s は (A4.2.16)式 の関係に (A4.2.24)式 を考慮することにより次のように与えられる。

$$\begin{aligned} y_s &= y - y_b \\ &= \frac{\alpha \lambda_1^2}{1 + \alpha \lambda_1^2} (A_1 e^{i\lambda_1 \xi} + A_2 e^{-i\lambda_1 \xi}) \end{aligned} \quad (\text{A4.2.25})$$

すなわち

$$y_s / y_b = \alpha \lambda_1^2 > 0 \quad (\text{A4.2.26})$$

の関係を有し常に同相となることがわかる。

今境界条件としてせん断力をとると

$$\xi=0,1 \text{ で } Q=GA_w \frac{dy_s}{\ell d\xi}=0$$

の関係があるので (A4.2.25)式 の関係を考慮すると

$$\left. \begin{array}{l} \xi=0 \quad A_1-A_2=0 \\ \xi=1 \quad \sin \lambda_1=0 \quad (\lambda_1=n\pi) \end{array} \right\} \quad (\text{A4.2.27})$$

の関係が与えられる。すなわち

$$\left. \begin{array}{l} \text{固有値} \quad \lambda_1=n\pi \\ \text{たわみ} \quad y_b=\frac{1}{1+\alpha\lambda_1^2}\delta\cos\lambda_1\xi \\ \quad \quad y_s=\frac{\alpha\lambda_1^2}{1+\alpha\lambda_1^2}\delta\cos\lambda_1\xi \end{array} \right\} \quad (\text{A4.2.28})$$

となることが明らかにされた。

付録 5.1 Rayleigh の方法による最低次固有振動数計算法

いま、系の歪エネルギー（位置エネルギー）を U ，運動エネルギーを T とおくと、波動中は $T+U$ は一定であり、最大変位（したがって U_{\max} ）においては速度 0（すなわち $T=0$ ）最大速度（したがって T_{\max} ）においては変位 0（すなわち $U=0$ ）となる。このことより振動系においては次式を満足することとなる。

$$T_{\max} = U_{\max} \quad (\text{A5.1.1})$$

今 U_{\max} は系の変位ベクトル $\{\delta_i\}$ を用いると次のように与えられる。

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \{\delta_i\}^T [K_{ij}] \{\delta_j\} \quad (\text{A5.1.2})$$

同様に T_{\max} は系の変位ベクトル $\{\delta_i\}$ により次のように表現される。

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \omega^2 \{\delta_i\}^T [m_{ij}] \{\delta_j\} \quad (\text{A5.1.3})$$

ここで ω は円固有振動数 [s^{-1}] を意味する。

(A5.1.2) 式および (A5.1.3) 式を (A5.1.1) 式に代入することにより ω^2 は次のように与えられる。

$$\omega^2 = \frac{\{\delta_i\}^T [K_{ij}] \{\delta_j\}}{\{\delta_i\}^T [m_{ij}] \{\delta_j\}} \quad (\text{A5.1.4})$$

$\{\delta_i\}$ には境界条件を満足し、一次モードに近い関数を代入すれば一次固有振動数（すなわち最低次固有振動数）を求めることができるが、この値は常に正確値より高めの数値を与える。

一般には $\{\delta_i\}$ として静的問題で与えられる変位ベクトル $\{\tilde{\delta}_i\}$ を用いる。したがってこのときには ω^2 は次式により計算する。

$$\omega^2 = \frac{\{\tilde{\delta}_i\}^T [K_{ij}] \{\tilde{\delta}_j\}}{\{\tilde{\delta}_i\}^T [m_{ij}] \{\tilde{\delta}_j\}} \quad (\text{A5.1.5})$$

$\{\tilde{\delta}_i\}$ として採用する変位ベクトルの選定について一般則はないが、通常最低次固有振動数計算にあたっては静的変位の変位ベクトルを採用するのが通例である。 $\{\delta_i\} \doteq \{\tilde{\delta}_i\}$ ではあっても、分母，分子に

これら変位ベクトルが含まれているため，誤差は一般に小さい。
このため工学上の振動計算に多用される。

付録 5.2 二重底構造に対するエネルギー式の導入

寺沢 [34] の表記に従い、二重殻構造より $s_x \times s_y$ の部分を切り出した部分要素に働く力、モーメントの定式化を行い構造要素のエネルギー式を導く。Fig.A5.1.1 に部分要素に働く力、モーメントの定義とそれらの正方向を示す。Fig.A5.2.1 に示す記号は次のとおりである。

水 平 軸 力	:	N_x, N_y
水 平 剪 断 力	:	V_x, V_y
鉛 直 剪 断 力	:	Q_x, Q_y
回 転 曲 げ モーメント	:	M_x, M_y
ね じ り モーメント	:	T_{xy}, T_{yx}

また、断面積を次のように定義する。

A_{fx} :	x 軸に直交する断面のスチフナを含んだ 平板断面積
$A_{fx'}$:	x 軸に直交する断面のスチフナを除いた 平板断面積
A_{wx} :	x 軸に直交する断面のウェブの断面積
A_{fy} :	y 軸に直交する断面の断面積 ($=A_{fy'}$)
$A_{wy'}$:	y 軸に直交する断面のウェブの断面積

(1) 異方性板における応力と歪

平板のポアソン効果を考慮した直歪 $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ 、剪断歪 γ は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= -\frac{\partial^2 w_{bx}}{\partial x^2}(z+z_x) \\ \varepsilon_y &= -\frac{\partial^2 w_{by}}{\partial y^2}(z+z_y) \\ \gamma &= -\frac{\partial^2 w_{bx}}{\partial x \partial y}(z+z_x) - \frac{\partial^2 w_{by}}{\partial x \partial y}(z+z_y) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A5.2.1})$$

尚、 $z=0$ の位置を Fig.A5.2.1 に示す底板の位置とする。

底板、内底板には Fig.A5.2.1 に示すように x 方向にはスチフナが配置される関係上異方性板としての働きをする。

今、 x 方向にスチフナが配置されるとし、平板の板厚が η 倍になったときのポアソン比は次式で与えられる。

$$\nu_x = \nu, \quad \nu_y = \frac{\nu}{\eta} \quad (\text{A5.2.2})$$

このとき歪と応力の関係は次式により求められる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu_x \nu_y} (\varepsilon_x + \nu_y \varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu_x \nu_y} (\nu_x \varepsilon_x + \varepsilon_y) \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma \end{aligned} \right\} \quad (\text{A5.2.3})$$

(2) 力、モーメントおよび剛性

・軸力 N_x, N_y

Fig.A5.2.1 に示す s_x に働く軸力 N_x は (A5.2.1) 式および (A5.2.3) 式より次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
N_x &= \int_{A_{fx}} \sigma_{fx} dA_{fx} + \int_{A_{wx}} \sigma_{wx} dA_{wx} \\
&= - \left[\frac{E}{1-\nu_x \nu_y} \int_{A_{fx}} (z+z_x) dA_{fx} + E \int_{A_{wx}} (z+z_x) dA_{wx} \right] \frac{\partial^2 w_{bx}}{\partial x^2} - \left[\frac{E \nu_y}{1-\nu_x \nu_y} \int_{A_{fx}} (z+z_y) dA_{fx} \right] \frac{\partial^2 w_{by}}{\partial y^2} \\
N_y &= \int_{A_{fy}} \sigma_{fy} dA_{fy} + \int_{A_{wy}} \sigma_{wy} dA_{wy} \\
&= - \left[\frac{E}{1-\nu_x \nu_y} \int_{A_{fy}} (z+z_y) dA_{fy} + E \int_{A_{wy}} (z+z_y) dA_{wy} \right] \frac{\partial^2 w_{by}}{\partial y^2} - \left[\frac{E \nu_x}{1-\nu_x \nu_y} \int_{A_{fy}} (z+z_x) dA_{fy} \right] \frac{\partial^2 w_{bx}}{\partial x^2}
\end{aligned} \tag{A 5.2.4}$$

(A 5.2.4) 式における右辺第一項により曲げ中性軸位置 z_x, z_y が規定されるため、各々の右辺第一項は 0 となる。

・ 水平剪断力 V_x, V_y

$$\begin{aligned}
V_x &= \int_{A_{fy'}} \tau_{xy} dA_{fy'} \\
&= - \left[\frac{E}{2(1+\nu)} \int_{A_{fy'}} (z+z_x) dA_{fy'} \right] \frac{\partial^2 w_{bx}}{\partial x \partial y} - \left[\frac{E}{2(1+\nu)} \int_{A_{fy'}} (z+z_y) dA_{fy'} \right] \frac{\partial^2 w_{by}}{\partial x \partial y} \\
V_y &= \int_{A_{fx'}} \tau_{xy} dA_{fx'} \\
&= - \left[\frac{E}{2(1+\nu)} \int_{A_{fx'}} (z+z_x) dA_{fx'} \right] \frac{\partial^2 w_{bx}}{\partial x \partial y} - \left[\frac{E}{2(1+\nu)} \int_{A_{fx'}} (z+z_y) dA_{fx'} \right] \frac{\partial^2 w_{by}}{\partial x \partial y}
\end{aligned} \tag{A 5.2.5}$$

・ 鉛直剪断力 Q_x, Q_y

$$\begin{aligned}
Q_x &= \left[\frac{E}{1+\nu} \int_{A_{wx}} dA_{wx} \right] \frac{\partial w_{sx}}{\partial x} \\
Q_y &= \left[\frac{E}{1+\nu} \int_{A_{wy}} dA_{wy} \right] \frac{\partial w_{sy}}{\partial y}
\end{aligned} \tag{A 5.2.6}$$

・ 曲げモーメント M_x, M_y

$$\begin{aligned}
M_x &= \int_{A_{fx}} (z + z_x) \sigma_{fx} dA_{fx} + \int_{A_{wx}} (z + z_x) \sigma_{wx} dA_{wx} \\
&= - \left[\frac{E}{1 - \nu_x \nu_y} \int_{A_{fx}} (z + z_x)^2 dA_{fx} + E \int_{A_{wx}} (z + z_x)^2 dA_{wx} \right] \frac{\partial^2 w_{bx}}{\partial x^2} - \left[\frac{E \nu_y}{1 - \nu_x \nu_y} \int_{A_{fx}} (z + z_x)(z + z_y) dA_{fx} \right] \frac{\partial^2 w_{by}}{\partial y^2} \\
M_y &= \int_{A_{fy}} (z + z_y) \sigma_{fy} dA_{fy} + \int_{A_{wy}} (z + z_y) \sigma_{wy} dA_{wy} \\
&= - \left[\frac{E}{1 - \nu_x \nu_y} \int_{A_{fy}} (z + z_y)^2 dA_{fy} + E \int_{A_{wy}} (z + z_y)^2 dA_{wy} \right] \frac{\partial^2 w_{by}}{\partial y^2} - \left[\frac{E \nu_y}{1 - \nu_x \nu_y} \int_{A_{fy}} (z + z_x)(z + z_y) dA_{fy} \right] \frac{\partial^2 w_{bx}}{\partial x^2}
\end{aligned}
\tag{A 5.2.7}$$

・ ね じ れ も ー め ン ト T_{xy}, T_{yx}

$$\begin{aligned}
T_{xy} &= - \int_{A_{fx'}} (z + z'_x) \tau_{xy} dA_{fx'} + V_y (z'_x - z_y) \\
&= \left[\frac{E}{2(1 + \nu)} \int_{A_{fx'}} (z + z'_x)(z + z_x) dA_{fx'} \right] \frac{\partial^2 w_{bx}}{\partial x \partial y} + \left[\frac{E}{2(1 + \nu)} \int_{A_{fx'}} (z + z'_x)(z + z_y) dA_{fx'} \right] \frac{\partial^2 w_{by}}{\partial x \partial y} \\
&\quad - \left[\frac{E}{2(1 + \nu)} (z'_x - z_y) \int_{A_{fx'}} (z + z_x) dA_{fx'} \right] \frac{\partial^2 w_{bx}}{\partial x \partial y} - \left[\frac{E}{2(1 + \nu)} (z'_x - z_y) \int_{A_{fx'}} (z + z_y) dA_{fx'} \right] \frac{\partial^2 w_{by}}{\partial x \partial y} \\
&= \left[\frac{E}{2(1 + \nu)} \int_{A_{fx'}} (z + z_x)(z + z_y) dA_{fx'} \right] \frac{\partial^2 w_{bx}}{\partial x \partial y} - \left[\frac{E}{2(1 + \nu)} \int_{A_{fx'}} (z + z_y)^2 dA_{fx'} \right] \frac{\partial^2 w_{by}}{\partial x \partial y}
\end{aligned}
\tag{A 5.2.8}$$

$$\begin{aligned}
T_{yx} &= - \int_{A_{fy'}} (z + z'_y) \tau_{xy} dA_{fy'} + V_x (z_x - z'_y) \\
&= - \left[\frac{E}{2(1 + \nu)} \int_{A_{fy'}} (z + z'_y)(z + z_x) dA_{fy'} \right] \frac{\partial^2 w_{bx}}{\partial x \partial y} - \left[\frac{E}{2(1 + \nu)} \int_{A_{fy'}} (z + z'_y)(z + z_y) dA_{fy'} \right] \frac{\partial^2 w_{by}}{\partial x \partial y} \\
&\quad - \left[\frac{E}{2(1 + \nu)} (z_x - z'_y) \int_{A_{fy'}} (z + z_x) dA_{fy'} \right] \frac{\partial^2 w_{bx}}{\partial x \partial y} - \left[\frac{E}{2(1 + \nu)} (z_x - z'_y) \int_{A_{fy'}} (z + z_y) dA_{fy'} \right] \frac{\partial^2 w_{by}}{\partial x \partial y} \\
&= \left[\frac{E}{2(1 + \nu)} \int_{A_{fy'}} (z + z_x)^2 dA_{fy'} \right] \frac{\partial^2 w_{bx}}{\partial x \partial y} - \left[\frac{E}{2(1 + \nu)} \int_{A_{fy'}} (z + z_x)(z + z_y) dA_{fy'} \right] \frac{\partial^2 w_{by}}{\partial x \partial y}
\end{aligned}
\tag{A 5.2.9}$$

(A 5.2.4) 式 から (A 5.2.9) 式 までの力、モーメントをと
りまとめる。

$$\left. \begin{aligned}
N_x &= - \left[n_x \frac{\partial^2 w_{by}}{\partial y^2} \right] s_x \\
N_y &= - \left[n_y \frac{\partial^2 w_{bx}}{\partial x^2} \right] s_y \\
V_x &= - \left[q_{xy} \frac{\partial^2 w_{bx}}{\partial x \partial y} + q_{yy} \frac{\partial^2 w_{by}}{\partial x \partial y} \right] s_y \\
V_y &= - \left[q_{xx} \frac{\partial^2 w_{bx}}{\partial x \partial y} + q_{yx} \frac{\partial^2 w_{by}}{\partial x \partial y} \right] s_x \\
Q_x &= \left[S_x \frac{\partial w_{sx}}{\partial x} \right] s_x \\
Q_y &= \left[S_y \frac{\partial w_{sy}}{\partial y} \right] s_y \\
M_x &= - \left[D_x \frac{\partial^2 w_{bx}}{\partial x^2} + D_1 \frac{\partial^2 w_{by}}{\partial y^2} \right] s_x \\
M_y &= - \left[D_y \frac{\partial^2 w_{by}}{\partial y^2} + D_1 \frac{\partial^2 w_{bx}}{\partial x^2} \right] s_y \\
T_{xy} &= \left[D_{xx} \frac{\partial^2 w_{bx}}{\partial x \partial y} + D_{xy} \frac{\partial^2 w_{by}}{\partial x \partial y} \right] s_x \\
T_{yx} &= \left[D_{yx} \frac{\partial^2 w_{bx}}{\partial x \partial y} + D_{yy} \frac{\partial^2 w_{by}}{\partial x \partial y} \right] s_y
\end{aligned} \right\} \quad (A5.2.10)$$

た だ し 、

$$\left. \begin{aligned}
S_x &= \frac{1}{2} \frac{E}{1+\nu} \frac{1}{s_x} \int dA_{wx} \\
S_y &= \frac{1}{2} \frac{E}{1+\nu} \frac{1}{s_y} \int dA_{wy}
\end{aligned} \right\} \quad (A5.2.11)$$

$$\left. \begin{aligned}
n_x s_x &= \frac{E v_y}{1 - v_x v_y} \int_{A_{fx}} (z + z_y) dA_{fx} \\
n_y s_y &= \frac{E v_x}{1 - v_x v_y} \int_{A_{fy}} (z + z_x) dA_{fy} \\
q_{xy} s_y &= \frac{E}{2(1 + \nu)} \int_{A_{fy}} (z + z_x) dA_{fy} \\
q_{yy} s_y &= \frac{E}{2(1 + \nu)} \int_{A_{fy}} (z + z_y) dA_{fy} \\
q_{xx} s_x &= \frac{E}{2(1 + \nu)} \int_{A_{fx}} (z + z_x) dA_{fx} \\
q_{yx} s_x &= \frac{E}{2(1 + \nu)} \int_{A_{fx}} (z + z_y) dA_{fx} \\
S_x s_x &= \frac{k' E A_{wx}}{2(1 + \nu)} \\
S_y s_y &= \frac{k' E A_{wy}}{2(1 + \nu)} \\
D_x s_x &= \frac{E}{1 - v_x v_y} \int_{A_{fx}} (z + z_x)^2 dA_{fx} + E \int_{A_{wx}} (z + z_x)^2 dA_{wx} \\
D_y s_y &= \frac{E}{1 - v_x v_y} \int_{A_{fy}} (z + z_y)^2 dA_{fy} + E \int_{A_{wy}} (z + z_y)^2 dA_{wy} \\
D_1 s_x &= \frac{E v_y}{1 - v_x v_y} \int_{A_{fx}} (z + z_x)(z + z_y) dA_{fx} \\
D_1' s_y &= \frac{E v_y}{1 - v_x v_y} \int_{A_{fy}} (z + z_x)(z + z_y) dA_{fy} \\
D_{xy} s_x &= \frac{E}{2(1 + \nu)} \int_{A_{fx}} (z + z_y)^2 dA_{fx} \\
D_{yx} s_y &= \frac{E}{2(1 + \nu)} \int_{A_{fy}} (z + z_x)^2 dA_{fy} \\
D_{xx} s_x &= \frac{E}{2(1 + \nu)} \int_{A_{fx}} (z + z_x)(z + z_y) dA_{fx} \\
D_{yy} s_y &= \frac{E}{2(1 + \nu)} \int_{A_{fy}} (z + z_x)(z + z_y) dA_{fy}
\end{aligned} \right\} \quad (A5.2.12)$$

(A5.2.12) 式より D_1 と D_1' の同一性を確認できる。

$$D_1 = \frac{E v_y}{1 - v_x v_y} \frac{1}{s_x} \int_{A_{fx}} (z + z_x)(z + z_y) dA_{fx} = \frac{E v_y}{1 - v_x v_y} \frac{1}{s_y} \int_{A_{fy}} (z + z_x)(z + z_y) dA_{fy} \equiv D_1'$$

即ち、

$$D_1 \equiv D_1' \quad (A5.2.13)$$

さらにねじり剛性については x 軸方向にスチフナが配置されていようと近似的に $z_x \cong z_y$ とおけるので以後は D_{xy} で統一して表示する。

$$D_{xx} \cong D_{yy} \cong D_{xy} = D_{yx} = \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{1}{s_x} \int_{A_{fx}} (z + z_x)^2 dA_{fx}, \quad (\text{A 5.2.14})$$

(A 5.2.10) 式から (A 5.2.14) 式を統合して歪エネルギー dV を求めると次のようになる。

$$\begin{aligned} dV = & \frac{D_x}{2} \left(\frac{\partial^2 w_{bx}}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{D_y}{2} \left(\frac{\partial^2 w_{by}}{\partial y^2} \right)^2 + D_1 \frac{\partial^2 w_{bx}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_{by}}{\partial y^2} \\ & + \frac{D_{xy}}{2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w_{bx}}{\partial x \partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 w_{bx}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_{by}}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial^2 w_{by}}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \\ & + \frac{S_x}{2} \left(\frac{\partial w_{sx}}{\partial x} \right)^2 + \frac{S_y}{2} \left(\frac{\partial w_{sy}}{\partial y} \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{A 5.2.15})$$

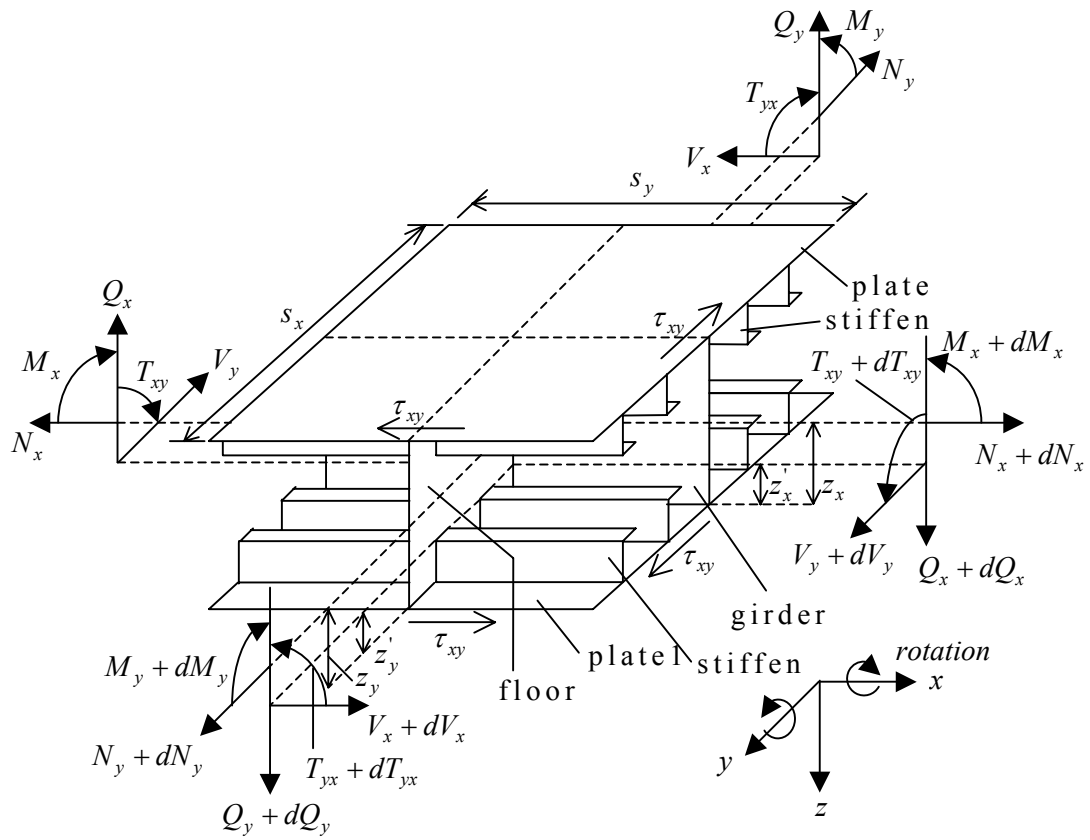


Fig.A5.2.1 Definition of force/moment and their positive directions

付録 5.3 エネルギー式の釣り合い方程式との同一性

山越 [33] は剪断変形を考慮した場合の釣り合い式を次式で表している。

$$\left. \begin{aligned} S_x &= \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right) + S_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) = q \\ D_x \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + D_1 \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} + D_{xy} \left(\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} \right) - S_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x \right) &= 0 \\ D_y \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} + D_1 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + D_{xy} \left(\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} \right) - S_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_y \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A 5.3.1})$$

付録 5.2 で与えた歪エネルギーより系全体の歪エネルギーは次式で与えられる。

$$\begin{aligned} V &= \frac{D_x}{2} \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \left(\frac{\partial^2 w_{bx}}{\partial x^2} \right)^2 dx dy + \frac{D_y}{2} \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \left(\frac{\partial^2 w_{by}}{\partial y^2} \right)^2 dx dy + D_1 \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \frac{\partial^2 w_{bx}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_{by}}{\partial y^2} dx dy \\ &+ \frac{D_{xy}}{2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w_{bx}}{\partial x \partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 w_{bx}}{\partial x \partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 w_{by}}{\partial x \partial y} \right) + \left(\frac{\partial^2 w_{by}}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (\text{A 5.3.2})$$

同様に、位置エネルギーは次式で与えられる。

$$T = q \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} w dx dy \quad (\text{A 5.3.3})$$

ここで、山越にならって曲げたわみ w_{bx}, w_{by} による傾斜角を φ_x, φ_y で表示する。

$$\left. \begin{aligned} \varphi_x &= -\frac{\partial w_{bx}}{\partial x} \\ \varphi_y &= -\frac{\partial w_{by}}{\partial y} \\ \frac{\partial w_{sx}}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x \\ \frac{\partial w_{sy}}{\partial y} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_y \end{aligned} \right\} \quad (\text{A 5.3.4})$$

$\delta(V-T)=0$ を計算した結果を次式に示す。

$$\begin{aligned} & \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \left[D_x \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + D_1 \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} + D_{xy} \left(\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} \right) - S_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x \right) \right] \delta \varphi_x dx dy \\ & + \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \left[D_y \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} + D_1 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + D_{xy} \left(\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} \right) - S_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_y \right) \right] \delta \varphi_y dx dy \\ & + \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \left[S_x \left(\frac{\partial w^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right) + S_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) - q \right] \delta w dx dy = 0 \end{aligned} \quad (\text{A 5.3.5})$$

(A 5.3.5)式と(A 5.3.1)式は一致しておりエネルギー式の同一性が確認された。